# Les champs de jauge ou comment unir nos forces

CPPM, 1er avril 2023

**Thierry Masson**

Centre de Physique Théorique

# De quoi va-t-on parler ?

- D'interactions fondamentales…
- De physique des particules…
- De mathématiques plus ou moins récentes.
- D'altitudes et de pentes…

# Plan de l'exposé

1. **Quelques éléments historiques**

2. Quelques éléments techniques

3. Les théories de jauge : succès, problèmes et solutions

# Des points matériels aux champs

## Mécanique de Newton

- Notion de **point matériel**. Propriétés : **ponctuel + masse**.
- Notion de **force** : vecteur $\vec{F}$ qui « s'applique » sur un point matériel.
- Loi fondamentale de la dynamique : $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ ➡ équation différentielle d'**évolution dans le temps**.

## Mécanique de Lagrange

- En 1744, de Maupertuis propose le **principe de moindre action** pour « expliquer » les lois de Newton.
- À partir de 1756, Lagrange donne sa forme mathématique à ce principe :
  - On remplace la force en tant que vecteur par une fonction sur l'espace : l'**énergie potentielle** $U$.
  - Il existe une fonction, le **lagrangien**, qui dépend de la position et de la vitesse : $L(\vec{r}, \vec{v})$
  - On associe à toute trajectoire (dérivable) $\gamma$ l'**action** $S[\gamma]$ à partir de $L(\vec{r}, \vec{v})$ : $S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \mathrm{d}t$.
  - **La trajectoire $\gamma$ qui correspond à une solution de la loi de Newton minimise $S[\gamma]$.**
  - Équations d'Euler-Lagrange.

# L'électromagnétisme dans sa version relativiste

- Dans ses expériences, Faraday met en avant les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$.

- Pour la version relativiste, on raisonne en dimension 4 : $\mu, \nu, \xi = 0, 1, 2, 3$ et on pose $c = 1$...
- **Dérivées partielles** $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ($\simeq$ variations) par rapport à toutes les directions $x^\mu$ de l'espace-temps.

- **Tenseur de Faraday** et **quadrivecteur courant** :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (j^\mu) = (\rho, \vec{j})$$

($\rho$ densité de charge, $\vec{j}$ densité de courant)

- En 1864, Maxwell écrit une synthèse des études sur l'électromagnétisme :

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\xi} + \frac{\partial F_{\nu\xi}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\xi\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = j^\mu$$

(version non relativiste : 4 équations)

# L'électromagnétisme et les transformations de jauge

- **Quadrivecteur potentiel :** $A = (A_\mu)$, 4 fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ **=** 4 champs à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

  - C'est une paramétrisation de $F_{\mu\nu}$ (et donc de $\vec{E}$ et $\vec{B}$).

- $\lambda$ fonction quelconque sur l'espace-temps à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$A_\mu \mapsto A_\mu - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \quad \text{implique} \quad F_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu}$$

  - La paramétrisation de $F_{\mu\nu}$ n'est pas unique.
  - C'est une **transformations de jauge locale**.
  - 👍 Premier exemple de **symétrie de jauge** (le nom sera expliqué plus loin...).

- Équations de Maxwell **=** Équations d'Euler-Lagrange du lagrangien :

$$L[A_\mu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

(Principe de moindre action en théorie des champs)

# Théories de jauge : premières tentatives

- **Jauge :** Futaille qui sert d'étalon pour ajuster et échantillonner les autres. *(Littré)*

- En 1918, H. Weyl considère une extension de la Relativité Générale d'Einstein.
  - Coordonnées $x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, sur l'espace-temps.
  - Weyl définit la métrique $g = (g_{\mu\nu})$ à un facteur multiplicatif près : $g \leftrightarrow e^{2\lambda} g$, **$\lambda$ fonction quelconque**.
  - $g$ mesure les longueurs ➞ notion de **jauge de mesure des longueurs** : le facteur $e^{2\lambda}$ modifie la jauge.
  - Pour $g$, Weyl introduit des champs $A_\mu$ et pour $e^{2\lambda} g$, il faut considérer $A_\mu - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}$.
  - **Interprétation :** $(A_\mu)$ = quadrivecteur potentiel pour $F_{\mu\nu}$ et $A_\mu \mapsto A_\mu - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}$ = transformation de jauge.
  - Contre argument d'Einstein : le comportement des horloges dépend du chemin choisi.
    ➞ Ce n'est pas une bonne théorie.

- En 1929, Weyl reconsidère son idée dans le contexte de la Mécanique Quantique.
  - La fonction d'onde de Schrödinger : $\psi$ et $e^{i\lambda}\psi$ décrivent la même physique **pour $\lambda$ constant**.
  - L'équation de Schrödinger permet de coupler $\psi$ à $(A_\mu)$, le potentiel pour $F_{\mu\nu} \simeq (\vec{E}, \vec{B})$.
  - **$\lambda$ fonction quelconque : l'équation de Schrödinger est invariante par les transformations combinées**

$$\psi \mapsto e^{i\lambda}\psi \qquad\qquad A_\mu \mapsto A_\mu - \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu}$$

  - Pour Weyl, cette symétrie est « l'origine et la nécessité du champ électromagnétique ».

# Yang et Mills, 1954

- Après Weyl : on sait que l'électromagnétisme est relié aux transformations de jauge du groupe $U(1)$.
  ($U(1) = \{e^{i\lambda} / \lambda \in \mathbb{R}\}$, plus de détails dans ce qui suit...)
- Début du XXe : d'autres interactions sont apparues au cœur des noyaux des atomes (radioactivité...).
  ➞ Les physiciens se demandent si ces interactions sont de ce type.
- En 1954, Yang et Mills proposent de généraliser au groupe $SU(2)$ ce qu'on savait sur le groupe $U(1)$.
  - Champs $A_\mu$ plus compliqué : $A_\mu = A_\mu^a T_a$ (somme sur $a = 1, 2, 3$) ➞ **espace plus riche** (algèbre de Lie de $SU(2)$).
  - **Tenseur des champs $A_\mu$** et transformations de jauge, **$g$ fonction sur l'espace-temps à valeurs dans $SU(2)$** :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + [A_\mu, A_\nu] \qquad A_\mu \mapsto g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \qquad ! \; F_{\mu\nu} \mapsto g^{-1} F_{\mu\nu} g$$

  - Lagrangien : **terme de Yang-Mills** invariant pas l'action de $g$,

$$L[A_\mu] = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} \sum_a F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$$

- Exploration de modèles pour les autres interactions...

# Vocabulaire et principe de jauge

- **Transformations de jauge locales** = $g$ non constant.
- **Transformations de jauge globales** = $g$ constant.

- **Principe de jauge :**
  - Considérer un lagrangien invariant par des transformations de jauge globales.
  - **Imposer l'invariance** de ce lagrangien sous des transformations de jauge locales.

- Programme de Weyl réalisé avec la Mécanique Quantique pour l'Électromagnétisme…

# Le Modèle Standard des particules élémentaires

- De nombreuses particules sont découvertes à partir des années 1950.
  - Des propositions sont faites pour **classer ces particules avec des groupes**.

- L'idée d'utiliser le **principe de jauge** s'impose :
  - Années 1950 : Succès pour l'électromagnétisme et sa version quantique (QED, renormalisation). (Kramers, Bethe, Schwinger, Feynman, Tomonaga, Dyson...)
  - Principe de jauge = construction très rigide + lien très fort avec les groupes.
  - Fin des années 1960 : Modèle électro-faible, groupe $U(1) \times SU(2)$ (Glashow, Weinberg, Salam).
  - Début des années 1970 : Modèle de l'interaction forte, groupe $SU(3)$ (Gell-Mann, Zweig, Fritzsch, Leutwyler).

- Des **travaux théoriques** ont consolidé cette démarche :
  - Début des années 1970 : preuve de la renormalisabilité ➔ usage de la symétrie de jauge. (Veltman, 't Hooft, Lee, Zinn-Justin, Becchi, Rouet, Stora, Tyutin...)
  - Début des années 1980 : formalisme mathématique des symétries de jauge (fibrés et connexions, voir plus loin).

# La notion de champ (classique)

- En physique, un champ est la donnée d'**une « valeur » en chaque point de l'espace-temps**.
  (Dans cet exposé, je ne considère que des champs compatibles avec la relativité restreinte)

- Une valeur est un élément d'un espace (plus ou moins) abstrait.
  - Un vecteur : le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$.
  - Un élément dans un espace plus abstrait : $\mathbb{R}^n$ ou plus souvent $\mathbb{C}^n$.

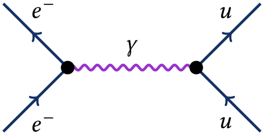
- **Théorie classique des champs** : un champ satisfait à des **équations aux dérivées partielles**.
  - La dynamique des champs est donnée par un **lagrangien**.
  - Les équations résultent du **principe de moindre action**.
  - **Équations d'Euler-Lagrange** généralisées aux champs.

# Des champs, des interactions et des particules

- La notion de champ nous oblige à **abandonner les notions de point matériel et de forces** (Newton).
  - Les « forces » dont remplacées par des champs d'interaction : les **champs de jauge** $A_\mu$
  - Les autres champs sont des **champs de matière** $\psi$.

- ⚠ Les équations aux dérivées partielles ne sont pas des équations d'**évolution** mais de **propagation**.

- **Théorie quantique des champs :**
  - Chaque type de champ définit un type de « quanta » ➞ un type de particule.
  - Les interactions sont des échanges de particules.



# Les symétries dans la Nature

**Un objet est symétrique s'il ne change pas lors d'une transformation « spécifique ».**

# Gérer les symétries : la notion de groupe

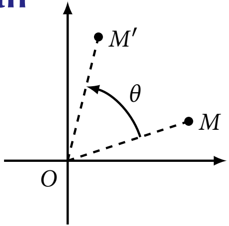
Les symétries sont encodées mathématiquement dans la structure de **groupes**.

- Un groupe $G$ est un ensemble de **transformations**, $g \in G$.
- On peut **composer deux transformations** pour en produire une autre :
  pour $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$, on a $g_3 = g_2 g_1 \in G$ (transformer par $g_1$ puis par $g_2$ **=** transformer par $g_3$).
- Il y a une **transformation neutre**, qui ne change rien : notation $e \in G$.
  Cette transformation vérifie : pour tout $g \in G$ on a $ge = eg = g$.
- On peut **inverser une transformation** : à tout $g \in G$ on peut associer $g^{-1}$ tel que $g^{-1}g = e$ et $gg^{-1} = e$.

Exemple : la droite des nombres réels, $G = (\mathbb{R}, +)$

- Composition : $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ (loi d'addition usuelle des nombres réels).
- Élément neutre : $e = 0$ (élément neutre pour l'addition).
- Inverse : l'inverse (au sens du groupe) de $x$ est l'opposé (au sens de la loi d'addition) $-x$.
- C'est un groupe abélien : $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

# Le groupe des rotations dans le plan




- On fixe (une fois pour toute) un point du plan : $O$.
- On se donne un angle $\theta$.
- À tout point $M$ du plan on associe le point $M'$, tourné de $M$ par l'angle $\theta$.
- On note $R(\theta)$ la rotation d'angle $\theta$.
- La structure de groupe :
  - La composition : $R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$.
  - L'élément neutre : $R(0^\circ)$ laisse invariant les points (angle nul). On a aussi $R(0^\circ) = R(360^\circ) = R(720^\circ) = \dots$
  - $R(-\theta)$ est l'inverse de $R(\theta)$.
- Le nombre d'éléments de ce groupe est infini : paramètre (continu) $\theta$ compris entre $0^\circ$ et $360^\circ$.
  ➞ **groupe de Lie**...
- C'est un groupe abélien : $R(\theta_2)R(\theta_1) = R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

**On note $SO(2)$ ou $U(1)$ ce groupe.**
Pour les connaisseurs : $U(1) = \{e^{i\lambda} / \lambda \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($\lambda = 2\pi\theta/360$)...

Généralisation : le groupe des rotations dans l'espace $SO(3)$. C'est un groupe **non abélien** !

# Le groupe $SU(2)$

- Présentation d'un élément de $SU(2)$ : un tableau de nombres complexes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $\bar{a} = d$, $\bar{b} = -c$ et $ad - bc = 1$.
- Loi de composition (multiplication des matrices) : $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$
- Élément neutre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- C'est un groupe non abélien.

- Les groupes $SU(n)$ pour $n \geq 3$ sont définis de façon similaire.
  Ce groupe agit naturellement sur l'espace $\mathbb{C}^n$.

- Les groupes $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(3)$ sont important en physique des particules...

# Les symétries en physique

- Un phénomène physique est invariant par un groupe de symétrie s'il ne change pas après transformation par les éléments de ce groupe.

- Exemple : le groupe des translations dans l'espace et des translations dans le temps.

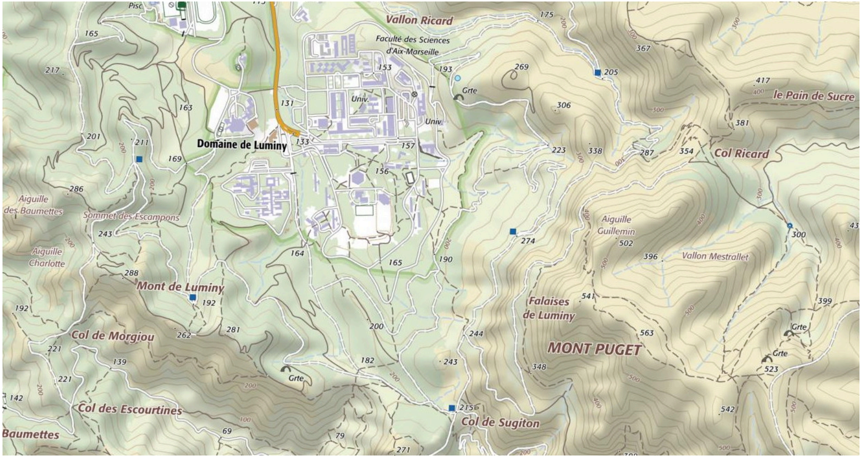
- Les symétries jouent un rôle essentiel :
  - Elles **guident** dans la construction de modèles et de théories.
  - Elles peuvent **expliquer** certains éléments d'une théorie.
  - Elles expriment une **redondance** d'information.

- Invariance d'un phénomène physique $\rightleftarrows$ Groupe de symétrie dans le modèle

- Symétrie (continue) dans le modèle $\rightleftarrows$ Quantité physique conservée (théorème de Nœther, 1918)

# Analogie : l'altitude et le champ des pentes

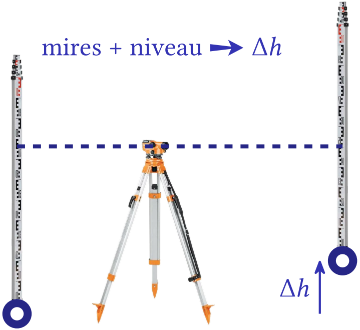
## Comment définit-on l'altitude partout en France ?

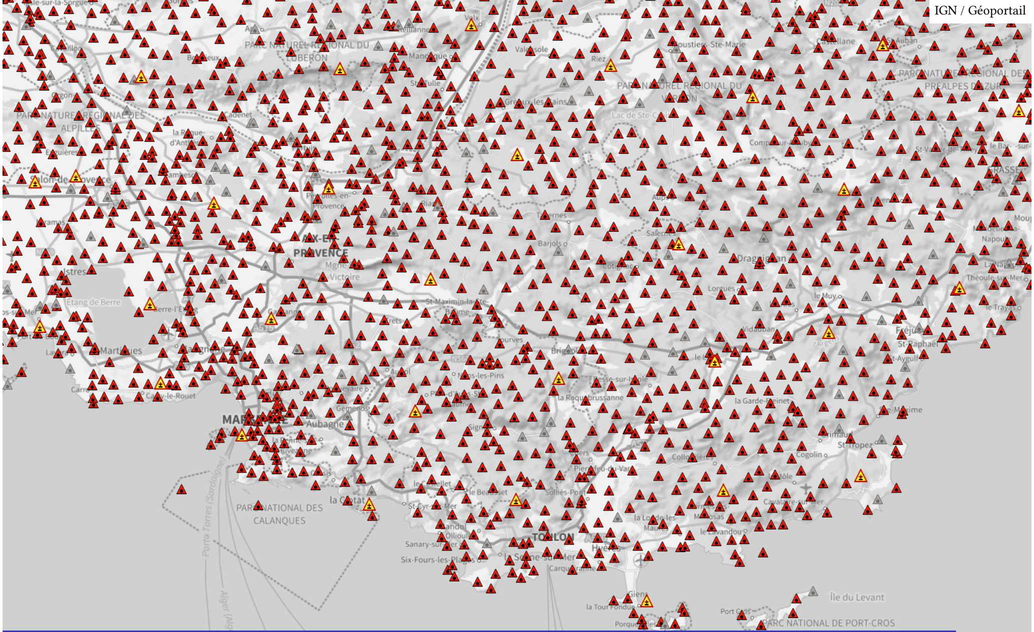


# La propagation de l’altitude

1. On choisit un point de référence, le **niveau zéro** : il est déterminé par le **marégraphe de Marseille**.
2. **De proche en proche**, on couvre le territoire de **repères d’altitude**.

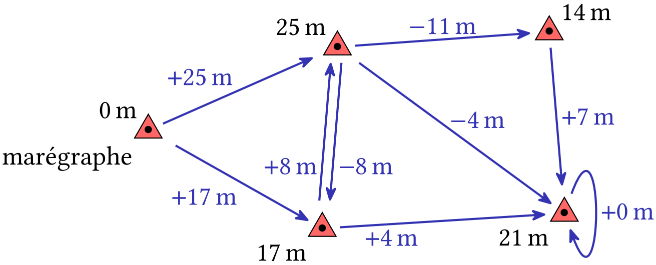







Repères d'altitude dans la région : clochers, croix, bornes, monuments…

# De proche en proche : la structure du groupe $(\mathbb{R}, +)$

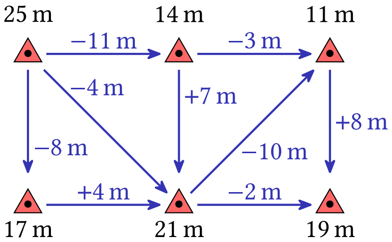



## Flèches bleues ($\Delta h$) = transformations du groupe $(\mathbb{R}, +)$

- Composition : $-11\,\mathrm{m} + 7\,\mathrm{m} = -4\,\mathrm{m}$
- Élément neutre : $+0\,\mathrm{m}$
- Inverse : $+8\,\mathrm{m}$ et $-8\,\mathrm{m}$.

# Quelques hypothèses pour aller vers la physique

- On suppose que l'IGN a placé les ▲ sur **un réseau régulier**.




- On suppose que la surface de la Terre est **lisse** :
  - Mathématiquement : la surface est dérivable une infinité de fois partout.
  - Pas de falaises, pas de murs, pas de cailloux, pas de grains de sable…

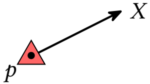
# Version infinitésimale

- On rapproche les pour en faire un continuum.
  ➞ **Le réseau régulier devient une surface lisse** dont chaque point $p$ est un .

- **La version infinitésimale d'une différence d'altitude (flèche bleue) est une pente.**

- Version infinitésimale d'un groupe de Lie = **Algèbre de Lie**.
  ➞ Les pentes sont reliées à **l'algèbre de Lie** du groupe de Lie $(\mathbb{R}, +)$.

- La pente dépend de la direction dans laquelle on se « déplace de façon infinitésimale ».
  - Le vecteur $X$ indique comment on s'éloigne de $p$.
  - **La pente est une valeur $A(X)$ en $p$ qui dépend de $X$.**

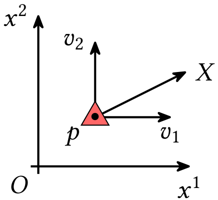



- Action du groupe : permet de relier deux valeurs au dessus de deux points distincts.

- Action de l'algèbre de Lie : valeur associée à tout couple $(p, X)$ ➞ **Propriétés d'un champ !**

# Des pentes $A(X)$ aux champs $A_\mu$

- $x^1$ et $x^2$ coordonnées sur la surface.
  - $v_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, pour $\mu = 1, 2$, est la direction de déplacement le long de $x^\mu$.
  - On pose $A_\mu = A(v_\mu)$ pour $\mu = 1, 2$ ➡ en chaque point on se donne $A = (A_\mu) = (A_1, A_2)$.
- Avec $X = X^1 v_1 + X^2 v_2 = X^\mu v_\mu$, on a $A(X) = X^\mu A_\mu$ (hypothèse que la surface est lisse).
- **$A = (A_\mu)$ caractérise toutes les pentes dans toutes les directions !**
- Le **déplacement horizontal** le long de $x^\mu$ est $v_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.
- Le **déplacement vertical** le long de $x^\mu$ est $A_\mu$.
- **L'opération $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\mu$ combine les deux déplacements.**
  (comme vous sur un sentier des collines...)



# Constatations et ambitions de physiciens

**Constatation empirique :** En physique des particules, des groupes $G$ interviennent ($U(1)$, $SU(n)$...).

- Les expériences mettent en évidence des quantités conservées ➞ théorème de Nœther.

**Constatation théorique :** Les lagrangiens naturels pour les champs de matière sont invariants par $G$.

- Invariants pas **transformations de jauge globales** ($g$ constant).
- Mais ces modèles ne décrivent que des champs de matière **sans interaction** !

**Ambition :** Appliquer le **principe de jauge** ➞ **transformations de jauge locales** ($g$ non constant).

**Constatation :** C'est réalisable en plusieurs étapes :

- **Ajouter des champs de jauge $A = (A_\mu)$** avec $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $A_\mu$ dans l'**algèbre de Lie de $G$**.
- Remplacer tous les $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ par $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\mu$ dans les lagrangiens précédents.
- Ajouter de la dynamique pour les champs $A = (A_\mu)$ : **terme de Yang-Mills $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$**.

**Constatation :** Les modèles modifiés obtenus décrivent des champs de matière **avec interactions**.

Premier exemple (re)construit : l'interaction électromagnétique de Maxwell, groupe $U(1)$.

**Ambition :** Trouver le bon groupe $G$ pour modéliser les données empiriques de la physique des particules.

**Constatation :** Le Modèle Standard des particules élémentaires répond à cette ambition...

# Les avantages des théories de jauge

- Économie de moyens = construction minimale = kit d'assemblage du *model builder* :
  1. Phénoménologie + théorème de Nœther :
     **groupe $G$, champs de matière $\psi_i$, lagrangien invariant par $G$** (invariance de jauge globale).
  2. La suite est déterminée : **champs $A_\mu$, terme de Yang-Mills, $D_\mu$** (invariance de jauge locale).
  3. Comparer le modèle obtenu aux expériences…

- Les théories de jauges ont des attraits techniques :
  - **Approche unique pour les 3 interactions** de la physique des particules (électromagnétisme, faible, forte).
  - Exploration de **théories unifiées de ces interactions** : un groupe $G$ « assez grand ».
    (exemple : $SU(5)$ par Georgi et Glashow en 1974).
  - **Théories renormalisables**.

- Les mathématiques des théories de jauge sont bien comprises :
  - Espace-temps $M$ + groupe $G$ = **fibré principal $P$** (= une copie de $G$ au dessus de chaque point de $M$).
  - Les $A_\mu$ sont les composantes d'une **connexion** sur $P$ (= « connecte » deux points infinitésimalement proches).
  - Les $\psi$ sont des sections de **fibrés (vectoriels) associés** à $P$.
  - $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + A_\mu$ est une **dérivée covariante** sur un tel fibré ➞ donne un sens à $D_\mu \psi$.

# Le Modèle Standard : champs (et fermions) de matière

## Leptons

| saveur | masse (GeV/c$^2$) | charge électrique |
|---|---|---|
| neutrino-électron | $(0 - 0.13) \times 10^{-9}$ | 0 |
| électron | 0.000511 | -1 |
| neutrino muonique | $(0.009 - 0.13) \times 10^{-9}$ | 0 |
| muon | 0.106 | -1 |
| neutrino tauique | $(0.04 - 0.14) \times 10^{-9}$ | 0 |
| tau | 1.777 | -1 |

## Quarks

| saveur | masse (GeV/c$^2$) | charge électrique |
|---|---|---|
| up | 0.002 | $2/3$ |
| down | 0.005 | $-1/3$ |
| charm | 1.3 | $2/3$ |
| strange | 0.1 | $-1/3$ |
| top | 173 | $2/3$ |
| bottom | 4.2 | $-1/3$ |

**Ce classement est lié aux groupes découverts dans la phénoménologie.**

# Le Modèle Standard : champs (et bosons) de jauge

| | Interaction électro-faible | | |
|---|---|---|---|
| | **Interaction électromagnétique** | **Interaction faible** | **Interaction forte** |
| Groupe : | $U(1)$ | $SU(2)$ | $SU(3)$ |
| Bosons d'interaction : | photon $\gamma$ | $W^+, W^-, Z^0$ | gluons (8) |
| Particules impliquées : | chargées | quarks, leptons | quarks, gluons |

$U(1) \times SU(2)$ pour l'interaction électro-faible = **unification de 2 interactions !**

# Le Modèle Standard : succès des théories de jauge

- Toutes les particules prédites ont été découvertes.
- Conforme à toutes les données expérimentales actuelles.
- Pour l'instant tout semble à sa place...

# Le Modèle Standard : toutes les particules sont à leur place ?

Toute ? Non ! Car un boson résiste encore et toujours à cette classification...

**Où placer le boson de Higgs ?**

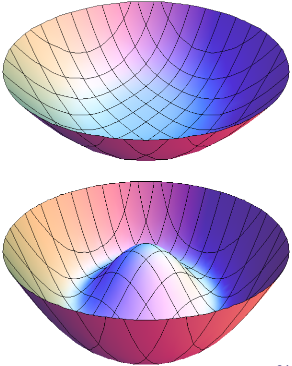
# Une absence de masse qui pèse lourd

- Les lagrangiens des théories de jauge sont impitoyables :

  **Invariance de jauge ➞ Les bosons de jauge n'ont pas de masse !**

- Dans le Modèle Standard, **les champs de matière n'ont pas de masse** non plus !
  (Raison : les parties « left » et « right » ne sont pas dans les mêmes représentations du groupe $SU(2)$)

- **La phénoménologie montre que de nombreuses particules ont une masse !**



- Solution : la **brisure spontanée de symétrie**.
  - Brout, Englert et Higgs, 1964.
  - On ajoute un champ $\phi$ à valeurs dans $\mathbb{C}^2$.
  - Ce champ est couplé dans le lagrangien aux bosons et aux fermions.
  - Ce champ admet un minimum d'énergie pour une valeur non nulle.
  - On considère les champs autour de cette configuration ➞ des **masses**.
  - Champ « résiduel » = **boson de Higgs** ➞ découvert en 2012 au LHC.
  - $L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \bar{\psi}_i\mathcal{Y}_{ij}\psi_j\phi + \text{h.c.} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi)$

- **D'un point de vue mathématique : qu'est-ce que ce champ $\phi$ ?**

# D'autres cadres mathématiques

## La Géométrie Non Commutative (GNC)

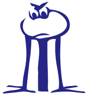
- Ça n'est pas une théorie en physique : c'est un programme de recherche en mathématiques…
  - Programme fondé par Alain Connes (bon anniversaire !) dans les années 1980.
  - But : unifier (structurellement) la géométrie et l'algèbre.
  - Principe : remplacer un espace « géométrique » par une algèbre associative et commutative…
    … puis « oublier » qu'elle est commutative (d'où le nom).
- La GNC a été utilisée pour construire un Modèle Standard des Particules Élémentaires.
- **Connexion non commutative** = champs de jauge $A_\mu$ + champ $\phi$.

## Les algébroïdes de Lie (transitifs)

- Approche développée au CPT.
- Structure mathématique qui hybride géométrie et algèbre (de Lie).
- **Connexion généralisée** = champs de jauge $A_\mu$ + champ $\phi$.

**Unification du champ $\phi$ avec les champs de jauge $A_\mu$ + $V(\phi)$ naturellement donné…**

# L'excès de symétrie



- Principe de jauge = augmenter la symétrie du lagrangien...
- Redondance de degrés de liberté qui sont « non physique ».
- Problème pour définir des observables (comparaison avec l'expérience).
  - $F_{\mu\nu}$ observable pour $U(1)$ (➡ $\vec{E}, \vec{B}$) mais pas observable pour $SU(2)$ (rappel : $F_{\mu\nu} \mapsto g^{-1} F_{\mu\nu} g$).
- Problème pour la quantification.
  - Introduire des champs (particules) « non physique » : des fantômes (et leurs anti-fantômes) !
  - Symétrie dite BRST ➡ preuve de la renormalisabilité...

# Conclusion : un schéma global

**Structure algébrique :**
groupe $G$ / algèbres
↓
**Symétries internes**
↓
Groupe du Modèle Standard

**Structure composite :**
fibré $P$ / algèbre / algébroïde
↓
**Structure globale**
↓
Théories de jauge,
Modèle Standard (MS)

**Structure géométrique :**
variété $M$ / algèbre commutative
↓
**Espace-temps**
↓
Relativité Générale (RG)

**Symétries internes** $\xrightarrow{\text{inclusion}}$ **Structure globale** $\xrightarrow{\text{projection}}$ **Espace-temps**

- Les théories de jauge ne sont pas au même niveau que la Relativité Générale.
  La « gravitation » n'est pas une interaction comme les 3 autres.
- Une théorie qui engloberait MS et RG = choix d'une structure globale pertinente.
  **Laquelle ?** Géométrie des Fibrés, Géométrie Non Commutative, Algébroïdes de Lie ?
- Ici on ne considère que les théories classiques…

# Merci pour votre attention

L’auteur s’excuse pour toutes les omissions, dissimulations et menteries cachées dans cet exposé…