Repenser la mathématique de l'espace pour repenser la mécanique quantique et la relativité générale

Congrès SFHST, Strasbourg, 21 avril 2017

Thierry Masson

Centre de Physique Théorique
&
Centre d'ÉPistémologie et d'ERgologie Comparatives

La question posée...

- La MQ remet en question l'espace et le temps à toute échelle.
  - Son espace naturel est un **espace de représentation** (espace de Hilbert).
- La RG est une théorie géométrique de l'espace-temps.
  - Son espace naturel est une **variété d'espace-temps** (pseudo-riemannienne).
- Les interactions fondamentales : géométrie + représentation + algèbre...
  - Théorie des fibrés et des connexions...
  - Représentations des groupes de jauge/structure ($U(1) \times SU(2) \times SU(3)$).
  - Quantification...

Quelles mathématiques pour réconcilier tout ça ?

La physique classique et l'espace

Deux concepts mathématiques liés à l'espace en physique classique.

1. **Les points matériels et les trajectoires.**
   - Points matériels (corpuscules) : discrets, individualisés, dénombrés...
   - Position dans l'espace à tout instant.
   - Dynamique : quantité de mouvement (vitesse), énergie, trajectoire...

2. **Les vibrations, les ondes et les champs.**
   - Origine : propagation d'une perturbation d'un milieu.
     ➞ Notion de champ classique (abandon d'un « support »).
   - Extension spatio-temporelle.
   - Superposition (pour certaines équations).
   - Dynamique : amplitude, vitesses de groupe et de phase, longueur et vecteur d'onde...

L'électrodynamique classique (Maxwell + Lorentz) utilise ces deux descriptions :
électrons + champs électromagnétique...

La physique (mécanique) quantique (MQ)

- **Concept unique** : vecteur dans un espace de Hilbert.
  ➞ Notion de « quanton ».

- **Ce n'est pas une particule :**
  - Pas de position dans l'espace, pas de notion de trajectoire.
  - Indiscernabilité des quantons de même type
    ➞ impossibilité de séparer et d'individualiser dans l'espace (possibilité de dénombrer)

- **Ce n'est pas une onde :**
  - La fonction d'onde est définie sur la moitié de l'espace de phase.
    (et non sur l'espace « physique ») ➞ Ce n'est pas une notion liée à l'espace ordinaire.
  - La normalisation la distingue d'un champ ordinaire.

- Certaines caractéristiques classiques sont inopérantes et non pertinentes.
  - Inégalités de Heisenberg sur des « variables » conjuguées…

- Concepts « abstraits » qui n'ont pas toujours de représentation classique.
  - Spin ?

La MQ n'a pas d'échelle spatiale

- La constante fondamentale du quantique est $\hbar$.
- Dimension naturelle :

$$\text{action} = \text{énergie} \times \text{temps} = \text{masse} \times \text{longueur}^2 \times \text{temps}^{-1}$$

- **Pas d'échelle naturelle d'espace pour les phénomènes quantiques.**

- Exemples de phénomènes quantiques « à grande échelle »:
  - Rayonnement du corps noir dans un four.
  - Cohérence quantique (intrication) dans des fibres optiques de plusieurs kilomètres.
  - Un bol de ^{4}He superfluide.
  - Un aimant supraconducteur (ex. au LHC).
  - Étoile à neutron : liquide de Fermi (neutrons/protons) et plasma de quarks de plusieurs km de diamètre.
  - Le principe de Pauli et la stabilité de la matière (à toute échelle).

L'espace est un mauvais concept en MQ

- On ne peut pas donner une position à un quanton.
  - Un quanton est décrit comme un vecteur dans un espace de Hilbert.
  - Exemple : émission spontanée d'une particule *a priori* dans toutes les directions,
    ➞ aucune « position » avant sa détection…

- On ne peut pas donner une trajectoire à un quanton.
  - Fentes d'Young : la notion de trajectoire entre l'émission et la détection est inopérante.
    ➞ « Paradoxe » de la détermination de la fente par où le quanton est « passé »…

- La notion de fonction d'onde est un échappatoire à ce problème :
  - Probabilité de présence : « un peu partout » à la fois…
  - Mais ce n'est pas une notion spatiale !

- La MQ est non locale !
  - Théorèmes de Bell et expériences EPR…
  - Pas le temps d'entrer dans le détail…

La Relativité Générale (RG) est géométrique

La RG décrit une géométrie à partir de la distribution de matière/énergie.

- Les solutions de la RG représentent un « substrat » spatio-temporel.
  - Solutions géométriques (M, g) qui décrivent **tout** l'Univers d'un coup !
- La « gravitation » est intrinsèque et constituante à la théorie.
  - Impossible de la « débrancher ».
  - La RG ne décrit pas une interaction au sens ordinaire.
    La mathématique de cette théorie est très différente des mathématiques des autres interactions (électrofaible, forte) : théories de jauge dans le modèle standard des particules élémentaires…

Quantifier la RG ?

- Quantification de la « 4e force » ?
  - La « dynamique de l'espace-temps » n'est pas une interaction.
- Problèmes MQ/RG à l'échelle de Planck $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$?
  - La MQ est incompatible avec l'espace-temps *bien avant* cette échelle !

(Remarque provocatrice : a-t-on cherché à quantifier la thermodynamique ?)

Quantifier la RG = renoncer à l'espace-temps, abroger la géométrie…

Il faut une théorie qui réconcilie MQ et RG à toute échelle spatiale.

- Pas nécessairement un emboîtement de l'une dans l'autre…
- Pas nécessairement une capitulation de l'une ou l'autre…

Thèse défendue dans ce qui suit :
La GNC est un cadre mathématique idéal pour mener à bien cette idée…

La GNC dans ses grandes lignes

GNC = Géométrie Non Commutative

- La GNC est un **cadre mathématique** et non une « théorie ».
- La GNC établit des liens profonds entre **géométrie, analyse et algèbre**...
  - Géométrie différentielle, fibrés, connexions, théorie des groupes, analyse hilbertienne, algèbres d'opérateurs, algèbres normées, opérateurs pseudodifférentiels...
  - Les mathématiques de la MQ, de la RG et des théories de jauge sont dedans !
- **La GNC remplace « espace » par « algèbre de fonctions. »**
  - Théorèmes sur les algèbres commutatives $\longleftrightarrow$ espaces...
  - Théorie des représentations = théorie des modules $\longleftrightarrow$ fibrés vectoriels...
- La GNC propose des **généralisations** :
  - théories de jauge non commutatives,
  - espaces déformés,
  - groupes quantiques,
  - invariants « topologiques »,
  - probabilités NC,
  - ...

Un peu d'histoire…

- **~1930 :** J. von Neumann introduit le cadre mathématique de la MQ.
  - Espaces de Hilbert, algèbres d'opérateurs, analyse spectrale…
  - Fonde l'étude des algèbres… de von Neumann.
- **~1930/40 :** I. M. Gelfand étudie les algèbres normées commutatives.
  - Théorème de Gelfand-Naimark sur les C^*-algèbres commutatives.
- **~1950/60 :** A. Grothendieck, M. Atiyah, F. Hirzebruch développent la K-théorie.
  - Classification des fibrés vectoriels sur un espace topologique.
    ➞ théorème de l'indice, opérateurs de Fredholm, K-homologie (dual)…
  - J.-P. Serre fonde la version algébrique : fibré vectoriel ≃ module projectif…
- **~1980 :** K-théorie, K-homologie, KK-théorie d'algèbres d'opérateurs…
- **~1980 :** A. Connes développe la cohomologie cyclique d'algèbres NC.
  - Relations fondamentales avec la K-théorie (caractère de Chern NC).
  - Détecte des structures différentielles sur des algèbres d'opérateurs…

Constatation: la non commutativité n'est pas un problème !

Quelques outils de la GNC

- Trace d'opérateurs et intégration : $\mathcal{L}^p = \{a \,/\, \mathrm{Tr}(|a|^p) < \infty\}$.
- Opérateurs non bornés et théorie spectrale.

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{K} \text{ (compacts)} \subset \mathcal{B} \text{ (bornés)} \subset \{\text{opérateurs non bornés}\}$$

infinitésimaux et intégration $\longleftarrow$ topologie $\longrightarrow$ géométrie et structures différentiables

- Calculs fonctionnels d'opérateurs.
- K-théorie, cohomologie cyclique, et leurs variantes…
- C^*-algèbres de groupes.
- Calculs différentiels « généralisés ».
- Connexions NC et théories de jauge généralisées.
- Théorie de Tomita-Takesaki.
- …

Un résultat « commutatif »

C^*-algèbre :

- algèbre associative normée complète (Banach),
- involution $a \mapsto a^*$ telle que $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Théorème (Gelfand-Naimark)

Toute C^*-algèbre commutative $\mathbf{A}$ *est de la forme $C_0(X)$ = fonctions continues nulles à l'infini sur un espace topologique X.*

➞ **La commutativité est associée à l'existence d'un espace « ordinaire ».**

- Si $\mathbf{A}$ contient une unité, X est compact.
- Les « K-théories » sont compatibles avec ces résultats.
- Algèbre de von Neumann commutative $\simeq L^\infty(X, \mathrm{d}\mu)$.

D'où vient cet espace ?

A algèbre associative.

- **Caractère de A** : morphisme d'algèbre non nul $\omega : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- Dans le théorème de Gelfand-Naimark : $X = \Delta(\mathbf{A})$ = espace des caractères de **A**.
  - À $a \in \mathbf{A}$ on associe $f_a : \Delta(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f_a(\omega) := \omega(a)$.
  - Ceci induit à l'isométrie $\mathbf{A} \xrightarrow{\simeq} C_0(\Delta(\mathbf{A}))$

⚠ **Très peu de caractères pour une algèbre non commutative !**

- **État de A** : forme linéaire positive de norme 1, $\phi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ des états est un espace topologique convexe.
- Construction GNS : on associe à ϕ une représentation de **A**.
- ϕ « pur » (= point extrême de $\mathcal{S}(\mathbf{A})$) $\Longleftrightarrow$ la représentation est irréductible.
- $\mathrm{Irrep}(\mathbf{A}) := \{$ représentations irréductibles de $\mathbf{A}$ $\}$

A une C^*-algèbre commutative : $\Delta(\mathrm{A}) \simeq \mathrm{Irrep}(\mathrm{A}) \simeq$ états purs.

Espaces et représentations...

Très nombreuses coïncidences dans le cas commutatif...

La GNC lève les dégénérescences des cas « commutatifs » :

commutativité	$\leftrightarrow$	non commutativité
caractères $\Delta(\mathbf{A})$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Irrep}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{A})$ états
espace	$\leftrightarrow$	représentation
"point"	$\leftrightarrow$	"fonction d'onde"
théories géométriques	$\leftrightarrow$	théories quantiques
(RG, théories de jauge...)		(MQ, TQC...)

Le paysage est beaucoup plus riche et divers en non commutatif !

Si on est NC on est quantique ?

Espaces et représentations… en même temps !

Algèbre de von Neumann :

- algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert,
- fermée pour la topologie forte.

Théorème (Décomposition centrale des algèbres de von Neumann)

$\mathbf{A}$ *algèbre de von Neumann sur* $\mathcal{H}$*. Le centre* $\mathcal{Z}(\mathbf{A}) \simeq L^\infty(X, \mu)$ *induit une décomposition*

$$\mathcal{H} \simeq \int_X^\oplus \mathcal{H}(x) \mathrm{d}\mu(x) \quad \textit{telle que} \quad \mathbf{A} \simeq \int_X^\oplus \mathbf{A}(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

où les $\mathbf{A}(x)$ *sont des facteurs (centre trivial, « blocs élémentaires »).*

La représentation se décompose le long d'un espace.

- Dans toute algèbre de von Neumann il y a un espace qui se cache…
- Un cadre naturel pour faire cohabiter MQ (représentation) et RG (espace) ?
- D'autres variantes de cette cohabitation : MASA (*Maximal Abelian Sub Algebra*). (ECOC = Ensemble Complet d'Observables qui Commutent…)

Un bon cadre pour (re)penser...

La MQ comme une **théorie de représentation** sur un espace de Hilbert.

- Représentation de l'algèbre $[x, p] = i\hbar$ (RCC).
- Représentations de groupes de symétrie.
- On peut écrire la MQ en termes de C^*-algèbres.
- **Unicité de la représentation de Schrödinger** de $[x, p] = i\hbar$.

Quelques **particularités de la TQC.**

- **Non unicité des représentations des RCC** en TQC.
- Théorème de Haag : l'espace de Hilbert construit avec des champs libres ne décrit pas les interactions ! (espace de Fock = états libres asymptotiques)
  ➡ procédure de renormalisation...
- **Nécessité de considérer l'espace de toutes les représentations.**

Un bon cadre pour (re)penser…

Quelques coïncidences « techniques »…

description classique :	particules	/	champs (EM par ex.)
modèle standard :	matière	/	interactions
théories de jauge :	fibrés vectoriels	/	dérivations covariantes
quantification :	fermions	/	bosons
groupe $SL(2, \mathbb{C})$:	spins demi-entiers	/	spins entiers
analyse hilbertienne :	opérateurs bornés	/	opérateurs non bornés

La GNC a des liens avec toutes ces « techniques »…

Un nouvel espoir ?

- La GNC n'a pas encore tenu ses promesses :
  - Modèles physiques de type Yang-Mills-Higgs… mais classiques !
  - Espace-temps riemannien (et non minkowskien).
  - Déformations de l'espace « à petite échelle » (non pertinent pour la MQ). (L'espace des phases est NC, mais peut-être pas l'espace-temps !)
- Il faudrait une nouvelle pensée NC :
  - Prendre au sérieux le potentiel de la GNC.
  - Repensez dans son langage les problèmes de la physique.
  - **Repenser en même temps représentations et espaces**.

Quelques références de lecture

Blackadar, B. (2006). *Operator Algebras, Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras.* Vol. 122. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag.

Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry.* Academic Press.

Dixmier, J. (1964). *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars.

François, J., Lazzarini, S., and Masson, T. (2014). "Gauge field theories: various mathematical approaches". In: *Mathematical Structures of the Universe.* Ed. by Eckstein, M., Heller, M., and Szybka, S. J. Kraków, Poland: Copernicus Center Press, pp. 177–225. eprint: 1404.4604.

Greenstein, G. and Zajonc, A. (2006). *The quantum challenge: modern research on the foundations of quantum mechanics.* Jones and Bartlett Learning.

Levy-Leblond, J.-M. et Balibar, F. (1984). *Quantique, Rudiments.* InterEditions, Editions du CNRS.

Masson, T. (2012). "Gauge theories in noncommutative geometry". In: *FFP11 Symposium Proceedings.* AIP.

Merci pour votre attention