Repenser
la mathématique de l'espace
pour repenser
la mécanique quantique et la relativité générale

Thierry Masson
Centre de Physique Théorique
&
Centre d'ÉPistémologie et d'ERgologie Comparatives

Congrès SFHST, Strasbourg, 21 avril 2017

Résumé

La Mécanique Quantique est très largement incompatible avec la notion classique de l'espace et du temps, ce qui conduit par exemple à des paradoxes du type des fentes d'Young. Au contraire, la Relativité Générale est une théorie de l'espace-temps. L'incompatibilité de ces deux théories se révèle donc déjà au plus profond de notre conception du lieu et de la cinématique du mouvement.

L'unification de ces théories ne peut pas simplement reposer sur un emboitement de l'une dans l'autre. L'histoire montre, depuis plus de 50 ans maintenant, que ce programme (essentiellement réalisé en physique théorique) ne répond pas aux questions de fond. En mathématique, et parallèlement, un programme de recherche s'est construit pour repenser l'espace en des termes plus généraux et plus larges : c'est la géométrie non commutative. Nous nous proposons de retracer l'histoire de ce programme de recherche, en partant des travaux de John von Neuman sur l'axiomatisation de la mécanique quantique jusqu'aux développements les plus récents sur les tentatives d'explorations d'espaces dits « quantiques ». Nous montrerons aussi en quoi les résultats de ce programme encouragent une pensée unificatrice (dans un cadre unique) des principes de la mécanique quantique et de ceux de la relativité générale.

. . . .

La question posée...

- La MQ remet en question l'espace et le temps à toute échelle.
  - Son espace naturel est un **espace de représentation** (espace de Hilbert).

- La RG est une théorie géométrique de l'espace-temps.
  - Son espace naturel est une **variété d'espace-temps** (pseudo-riemannienne).

- Les interactions fondamentales : géométrie + représentation + algèbre...
  - Théorie des fibrés et des connexions...
  - Représentations des groupes de jauge/structure ($U(1) \times SU(2) \times SU(3)$).
  - Quantification...

Quelles mathématiques pour réconcilier tout ça ?

. . . .

La physique classique et l'espace

Deux concepts mathématiques liés à l'espace en physique classique.

1. **Les points matériels et les trajectoires**.
   - Points matériels (corpuscules) : discrets, individualisés, dénombrés...
   - Position dans l'espace à tout instant.
   - Dynamique : quantité de mouvement (vitesse), énergie, trajectoire...

2. **Les vibrations, les ondes et les champs**.
   - Origine : propagation d'une perturbation d'un milieu.
     ➙ Notion de champ classique (abandon d'un « support »).
   - Extension spatio-temporelle.
   - Superposition (pour certaines équations).
   - Dynamique : amplitude, vitesses de groupe et de phase, longueur et vecteur d'onde...

L'électrodynamique classique (Maxwell $+$ Lorentz) utilise ces deux descriptions :
électrons $+$ champs électromagnétique...

La physique (mécanique) quantique (MQ)

- **Concept unique** : vecteur dans un espace de Hilbert.
  ➞ Notion de « quanton ».

- **Ce n'est pas une particule :**
  - Pas de position dans l'espace, pas de notion de trajectoire.
  - Indiscernabilité des quantons de même type
    ➞ impossibilité de séparer et d'individualiser dans l'espace (possibilité de dénombrer)
- **Ce n'est pas une onde :**
  - La fonction d'onde est définie sur la moitié de l'espace de phase.
    (et non sur l'espace « physique ») ➞ Ce n'est pas une notion liée à l'espace ordinaire.
  - La normalisation la distingue d'un champ ordinaire.
- Certaines caractéristiques classiques sont inopérantes et non pertinentes.
  - Inégalités de Heisenberg sur des « variables » conjuguées...
- Concepts « abstraits » qui n'ont pas toujours de représentation classique.
  - Spin ?

La MQ n'a pas d'échelle spatiale

- La constante fondamentale du quantique est $\hbar$.
- Dimension naturelle :

$$\text{action} = \text{énergie} \times \text{temps} = \text{masse} \times \text{longueur}^2 \times \text{temps}^{-1}$$

- **Pas d'échelle naturelle d'espace pour les phénomènes quantiques.**

- Exemples de phénomènes quantiques « à grande échelle »:
  - Rayonnement du corps noir dans un four.
  - Cohérence quantique (intrication) dans des fibres optiques de plusieurs kilomètres.
  - Un bol de ^{4}He superfluide.
  - Un aimant supraconducteur (ex. au LHC).
  - Étoile à neutron : liquide de Fermi (neutrons/protons) et plasma de quarks de plusieurs km de diamètre.
  - Le principe de Pauli et la stabilité de la matière (à toute échelle).

L’espace est un mauvais concept en MQ

- On ne peut pas donner une position à un quanton.
  - Un quanton est décrit comme un vecteur dans un espace de Hilbert.
  - Exemple : émission spontanée d’une particule *a priori* dans toutes les directions,
    ➥ aucune « position » avant sa détection…

- On ne peut pas donner une trajectoire à un quanton.
  - Fentes d’Young : la notion de trajectoire entre l’émission et la détection est inopérante.
    ➥ « Paradoxe » de la détermination de la fente par où le quanton est « passé »…

- La notion de fonction d’onde est un échappatoire à ce problème :
  - Probabilité de présence : « un peu partout » à la fois…
  - Mais ce n’est pas une notion spatiale !

- La MQ est non locale !
  - Théorèmes de Bell et expériences EPR…
  - Pas le temps d’entrer dans le détail…

La Relativité Générale (RG) est géométrique

La RG décrit une géométrie à partir de la distribution de matière/énergie.

- Les solutions de la RG représentent un « substrat » spatio-temporel.
  - Solutions géométriques (M, g) qui décrivent **tout** l’Univers d’un coup !

- La « gravitation » est intrinsèque et constituante à la théorie.
  - Impossible de la « débrancher ».
  - La RG ne décrit pas une interaction au sens ordinaire.
    La mathématique de cette théorie est très différente des mathématiques des autres interactions (électrofaible, forte) : théories de jauge dans le modèle standard des particules élémentaires…

. . . .

Quantifier la RG ?

- Quantification de la « 4e force » ?
  - La « dynamique de l'espace-temps » n'est pas une interaction.
- Problèmes MQ/RG à l'échelle de Planck $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$?
  - La MQ est incompatible avec l'espace-temps *bien avant* cette échelle !

(Remarque provocatrice : a-t-on cherché à quantifier la thermodynamique ?)

Quantifier la RG = renoncer à l'espace-temps, abroger la géométrie...

Il faut une théorie qui réconcilie MQ et RG à toute échelle spatiale.
- Pas nécessairement un emboîtement de l'une dans l'autre...
- Pas nécessairement une capitulation de l'une ou l'autre...

Thèse défendue dans ce qui suit :
La GNC est un cadre mathématique idéal pour mener à bien cette idée...

. . . .

La GNC dans ses grandes lignes

GNC = Géométrie Non Commutative
- La GNC est un **cadre mathématique** et non une « théorie ».
- La GNC établit des liens profonds entre **géométrie, analyse et algèbre**...
  - Géométrie différentielle, fibrés, connexions, théorie des groupes, analyse hilbertienne, algèbres d'opérateurs, algèbres normées, opérateurs pseudodifférentiels...
  - Les mathématiques de la MQ, de la RG et des théories de jauge sont dedans !
- **La GNC remplace « espace » par « algèbre de fonctions. »**
  - Théorèmes sur les algèbres commutatives ⟷ espaces...
  - Théorie des représentations = théorie des modules ⟷ fibrés vectoriels...
- La GNC propose des **généralisations** :
  - théories de jauge non commutatives,
  - espaces déformés,
  - groupes quantiques,
  - invariants « topologiques »,
  - probabilités NC,
  - ...

. . . .

Un peu d'histoire...

- **~1930 :** J. von Neumann introduit le cadre mathématique de la MQ.
  - Espaces de Hilbert, algèbres d'opérateurs, analyse spectrale...
  - Fonde l'étude des algèbres... de von Neumann.
- **~1930/40 :** I. M. Gelfand étudie les algèbres normées commutatives.
  - Théorème de Gelfand-Naimark sur les C^*-algèbres commutatives.
- **~1950/60 :** A. Grothendieck, M. Atiyah, F. Hirzebruch développent la K-théorie.
  - Classification des fibrés vectoriels sur un espace topologique.
    ➞ théorème de l'indice, opérateurs de Fredholm, K-homologie (dual)...
  - J.-P. Serre fonde la version algébrique : fibré vectoriel $\simeq$ module projectif...
- **~1980 :** K-théorie, K-homologie, KK-théorie d'algèbres d'opérateurs...
- **~1980 :** A. Connes développe la cohomologie cyclique d'algèbres NC.
  - Relations fondamentales avec la K-théorie (caractère de Chern NC).
  - Détecte des structures différentielles sur des algèbres d'opérateurs...

Constatation: la non commutativité n'est pas un problème !

. . . .

Quelques outils de la GNC

- Trace d'opérateurs et intégration : $\mathcal{L}^p = \{a \ / \ \mathrm{Tr}(|a|^p) < \infty\}$.
- Opérateurs non bornés et théorie spectrale.

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1 \subset \mathcal{K} \text{ (compacts)} \subset \mathcal{B} \text{ (bornés)} \subset \{\text{opérateurs non bornés}\}$$

infinitésimaux et intégration ⟵ topologie ⟶ géométrie et structures différentiables

- Calculs fonctionnels d'opérateurs.
- K-théorie, cohomologie cyclique, et leurs variantes...
- C^*-algèbres de groupes.
- Calculs différentiels « généralisés ».
- Connexions NC et théories de jauge généralisées.
- Théorie de Tomita-Takesaki.
- ...

. . . .

Un résultat « commutatif »

C^*-algèbre :
- algèbre associative normée complète (Banach),
- involution $a \mapsto a^*$ telle que $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

Theorem 1 (Gelfand-Naimark)**.** *Toute C^*-algèbre commutative $\mathbf{A}$ est de la forme $C_0(X)$ = fonctions continues nulles à l'infini sur un espace topologique X.*

➞ La commutativité est associée à l'existence d'un espace « ordinaire ».
- Si $\mathbf{A}$ contient une unité, X est compact.
- Les « K-théories » sont compatibles avec ces résultats.
- Algèbre de von Neumann commutative $\simeq L^\infty(X, \mathrm{d}\mu)$.

. . . .

D'où vient cet espace ?

$\mathbf{A}$ algèbre associative.
- **Caractère de $\mathbf{A}$** : morphisme d'algèbre non nul $\omega : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$.
- Dans le théorème de Gelfand-Naimark : $X = \Delta(\mathbf{A})$ = espace des caractères de $\mathbf{A}$.
  - À $a \in \mathbf{A}$ on associe $f_a : \Delta(\mathbf{A}) \to \mathbb{C}$ par $f_a(\omega) := \omega(a)$.
  - Ceci induit à l'isométrie $\mathbf{A} \xrightarrow{\simeq} C_0(\Delta(\mathbf{A}))$

⚠ **Très peu de caractères pour une algèbre non commutative !**

- **État de $\mathbf{A}$** : forme linéaire positive de norme 1, $\phi : \mathbf{A} \to \mathbb{C}$.
- L'espace $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ des états est un espace topologique convexe.
- Construction GNS : on associe à ϕ une représentation de $\mathbf{A}$.
- ϕ « pur » (= point extrême de $\mathcal{S}(\mathbf{A})$) $\Leftrightarrow$ la représentation est irréductible.
- $\mathrm{Irrep}(\mathbf{A}) := \{$ représentations irréductibles de $\mathbf{A}$ $\}$

A une C^*-algèbre commutative : $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{Irrep}(\mathbf{A}) \simeq$ états purs.

. . . .

Espaces et représentations...

Très nombreuses coïncidences dans le cas commutatif...

La GNC lève les dégénérescences des cas « commutatifs » :

commutativité	$\leftrightarrow$	non commutativité
caractères $\Delta(\mathbf{A})$	$\leftrightarrow$	$\mathrm{Irrep}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{A})$ états
espace	$\leftrightarrow$	représentation
"point"	$\leftrightarrow$	"fonction d'onde"
théories géométriques	$\leftrightarrow$	théories quantiques
(RG, théories de jauge...)		(MQ, TQC...)

Le paysage est beaucoup plus riche et divers en non commutatif !

Si on est NC on est quantique ?

. . . .

Espaces et représentations... en même temps !

Algèbre de von Neumann :
— algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert,
— fermée pour la topologie forte.

Theorem 2 (Décomposition centrale des algèbres de von Neumann)**.** $\mathbf{A}$ *algèbre de von Neumann sur* $\mathcal{H}$*. Le centre* $\mathcal{Z}(\mathbf{A}) \simeq L^\infty(X, \mu)$ *induit une décomposition*

$$\mathcal{H} \simeq \int_X^\oplus \mathcal{H}(x) \mathrm{d}\mu(x) \quad \textit{telle que} \quad \mathbf{A} \simeq \int_X^\oplus \mathbf{A}(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

où les $\mathbf{A}(x)$ *sont des facteurs (centre trivial, « blocs élémentaires »).*

La représentation se décompose le long d'un espace.
— Dans toute algèbre de von Neumann il y a un espace qui se cache...
— Un cadre naturel pour faire cohabiter MQ (représentation) et RG (espace) ?
— D'autres variantes de cette cohabitation : MASA (*Maximal Abelian Sub Algebra*).
(ECOC = Ensemble Complet d'Observables qui Commutent...)

. . . .

Un bon cadre pour (re)penser...

La MQ comme une **théorie de représentation** sur un espace de Hilbert.

— Représentation de l'algèbre $[x, p] = i\hbar$ (RCC).
— Représentations de groupes de symétrie.
— On peut écrire la MQ en termes de C^*-algèbres.

— **Unicité de la représentation de Schrödinger** de $[x, p] = i\hbar$.

Quelques **particularités de la TQC.**

— **Non unicité des représentations des RCC** en TQC.

— Théorème de Haag : l'espace de Hilbert construit avec des champs libres ne décrit pas les interactions ! (espace de Fock = états libres asymptotiques)
➞ procédure de renormalisation...

— **Nécessité de considérer l'espace de toutes les représentations.**

. . . .

Un bon cadre pour (re)penser...

Quelques coïncidences « techniques »...

description classique :	particules /	champs (EM par ex.)
modèle standard :	matière /	interactions
théories de jauge :	fibrés vectoriels /	dérivations covariantes
quantification :	fermions /	bosons
groupe $SL(2, \mathbb{C})$:	spins demi-entiers /	spins entiers
analyse hilbertienne :	opérateurs bornés /	opérateurs non bornés

La GNC a des liens avec toutes ces « techniques »...

. . . .

Un nouvel espoir ?

- La GNC n'a pas encore tenu ses promesses :
  - Modèles physiques de type Yang-Mills-Higgs… mais classiques !
  - Espace-temps riemannien (et non minkowskien).
  - Déformations de l'espace « à petite échelle » (non pertinent pour la MQ).
    (L'espace des phases est NC, mais peut-être pas l'espace-temps !)

- Il faudrait une nouvelle pensée NC :
  - Prendre au sérieux le potentiel de la GNC.
  - Repensez dans son langage les problèmes de la physique.
  - **Repenser en même temps représentations et espaces**.

. . . .

Quelques références de lecture

Blackadar, B. (2006). *Operator Algebras, Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras.* Vol. 122. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag.

Connes, A. (1994). *Noncommutative Geometry.* Academic Press.

Dixmier, J. (1964). *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars.

François, J., Lazzarini, S., and Masson, T. (2014). "Gauge field theories: various mathematical approaches". In: *Mathematical Structures of the Universe.* Ed. by Eckstein, M., Heller, M., and Szybka, S. J. Kraków, Poland: Copernicus Center Press, pp. 177–225. eprint: 1404.4604.

Greenstein, G. and Zajonc, A. (2006). *The quantum challenge: modern research on the foundations of quantum mechanics.* Jones and Bartlett Learning.

Levy-Leblond, J.-M. et Balibar, F. (1984). *Quantique, Rudiments.* InterEditions, Editions du CNRS.

Masson, T. (2012). "Gauge theories in noncommutative geometry". In: *FFP11 Symposium Proceedings.* AIP.