

Les théories de jauge : une interaction fondamentale entre physique et mathématique

Séminaire d'intérêt général
CPT, 19 février 2014

Thierry Masson

Centre de Physique Théorique
Campus de Luminy, Marseille



Objectifs de l'exposé

Objectifs de l'exposé

- Origine et signification des théories de jauge.
- Les structures mathématiques derrière ces théories.
- La brisure spontanée de symétrie.
- Généralisations mathématiques (plus ou moins) récentes.

Objectifs de l'exposé

- Origine et signification des théories de jauge.
- Les structures mathématiques derrière ces théories.
- La brisure spontanée de symétrie.
- Généralisations mathématiques (plus ou moins) récentes.

Prérequis :

- Un peu de culture en physique : équations de Maxwell.
- Un peu de calcul différentiel : la dérivée du produit de deux fonctions...
- Quelques notions mathématiques de base : nombres complexes, matrices...

Objectifs de l'exposé

- Origine et signification des théories de jauge.
- Les structures mathématiques derrière ces théories.
- La brisure spontanée de symétrie.
- Généralisations mathématiques (plus ou moins) récentes.

Prérequis :

- Un peu de culture en physique : équations de Maxwell.
- Un peu de calcul différentiel : la dérivée du produit de deux fonctions...
- Quelques notions mathématiques de base : nombres complexes, matrices...

 On n'abordera pas la quantification des théories de jauge.

Plan

- 1 La naissance des théories de jauge
- 2 Les principes des théories de jauge
- 3 Les mathématiques sous-jacentes
- 4 Problèmes et solutions
- 5 Nouvelles théories de jauge

*Entre un séminaire d'intérêt général et un cours simplifié,
il n'y a que l'épaisseur d'une crêpe...*

Proverbe universitaire breton

La naissance des théories de jauge

La naissance des théories de jauge

- 1 La naissance des théories de jauge**
- 2 Les principes des théories de jauge
- 3 Les mathématiques sous-jacentes
- 4 Problèmes et solutions
- 5 Nouvelles théories de jauge

La naissance des théories de jauge

Les origines

Les origines

Contexte scientifique des années 1920–1930 :

- Théorie d'Einstein de la gravitation (relativité générale) (1915).
- Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell (1864).
- Mécanique quantique (1926).

Les origines

Contexte scientifique des années 1920–1930 :

- Théorie d'Einstein de la gravitation (relativité générale) (1915).
- Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell (1864).
- Mécanique quantique (1926).

Point commun à ces théories :

Elles admettent des symétries **locales**.

Les origines

Contexte scientifique des années 1920–1930 :

- Théorie d'Einstein de la gravitation (relativité générale) (1915).
- Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell (1864).
- Mécanique quantique (1926).

Point commun à ces théories :

Elles admettent des symétries **locales**.

Symétrie locale : dépend des points de l'espace-temps.

Les origines

Contexte scientifique des années 1920–1930 :

- Théorie d'Einstein de la gravitation (relativité générale) (1915).
- Théorie de l'électromagnétisme de Maxwell (1864).
- Mécanique quantique (1926).

Point commun à ces théories :

Elles admettent des symétries **locales**.

Symétrie locale : dépend des points de l'espace-temps.

Symétrie globale : ne dépend pas des points de l'espace-temps.

Ex. : symétrie miroir, symétrie d'un cristal, symétrie matière-antimatière...

La naissance des théories de jauge

La relativité générale

La relativité générale

Principe de la relativité restreinte : les lois de la physique sont invariantes sous les transformations de Lorentz des coordonnées.

➔ Transformations globales.

La relativité générale

Principe de la relativité restreinte : les lois de la physique sont invariantes sous les transformations de Lorentz des coordonnées.

➔ Transformations globales.

Principe de la relativité générale : les lois de la physique sont invariantes sous **toutes** les transformations des coordonnées.

➔ Transformations locales.

La naissance des théories de jauge

La théorie électromagnétique de Maxwell

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

\vec{E} = champ électrique,

\vec{B} = champ magnétique,

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ = vitesse de la lumière,

ρ = densité de charges,

\vec{j} = densité de courant de charges,

$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ conservation de la charge.

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\operatorname{grad}} \right)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}, \quad j^\mu = (c\rho, \vec{j})$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

Propriétés des $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ et $\operatorname{div} \rightarrow \vec{A}$ et V existent localement.

\vec{A} = potentiel vecteur associé à \vec{B} ,

V = potentiel électrique associé à \vec{E} .

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A_\mu = (-V/c, \vec{A})$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0 \implies A_\mu \text{ existe localement.}$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

C'est une **symétrie locale due à la paramétrisation** en $A_\mu = (-V/c, \vec{A})$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

C'est une **symétrie locale due à la paramétrisation** en $A_\mu = (-V/c, \vec{A})$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

C'est une **symétrie locale due à la paramétrisation** en $A_\mu = (-V/c, \vec{A})$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

C'est une **symétrie locale due à la paramétrisation** en $A_\mu = (-V/c, \vec{A})$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

La théorie électromagnétique de Maxwell

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V$$

\vec{E} et \vec{B} ne changent pas par :

$$\vec{A} \mapsto \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$$

$$V \mapsto V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

χ est une fonction réelle sur l'espace-temps

C'est une **symétrie locale due à la paramétrisation** en $A_\mu = (-V/c, \vec{A})$

A-t-on besoin de considérer A_μ comme un objet fondamental ?

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$F_{\mu\nu}$ ne change pas par :

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$$

La naissance des théories de jauge

La mécanique quantique

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

Ψ solution

- ➔ $e^{i\theta} \Psi$ solution pour θ **constant**.
- ➔ Symétrie **globale**.

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

Ψ solution

→ $e^{i\theta} \Psi$ solution pour θ **constant**.

→ Symétrie **globale**.

L'équation de Schrödinger dans un potentiel électromagnétique (V, \vec{A}) et charge e :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 \Psi + eV\Psi$$

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

Ψ solution

- $e^{i\theta} \Psi$ solution pour θ **constant**.
- Symétrie **globale**.

L'équation de Schrödinger dans un potentiel électromagnétique (V, \vec{A}) et charge e :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 \Psi + eV\Psi$$

Ψ solution pour (V, \vec{A}) , χ **fonction réelle**.

- $e^{-\frac{ie}{\hbar} \chi} \Psi$ solution pour $\left(V - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \chi \right)$ → \vec{E} et \vec{B} inchangés.
- Symétrie **locale**.

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

Ψ solution

- $e^{i\theta} \Psi$ solution pour θ **constant**.
- Symétrie **globale**.

L'équation de Schrödinger dans un potentiel électromagnétique (V, \vec{A}) et charge e :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 \Psi + eV\Psi$$

Ψ solution pour (V, \vec{A}) , χ **fonction réelle**.

- $e^{-\frac{ie}{\hbar} \chi} \Psi$ solution pour $\left(V - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \chi \right)$ → \vec{E} et \vec{B} inchangés.
- Symétrie **locale**.

⚠ Cette symétrie affecte **Ψ et (V, \vec{A})** .

La mécanique quantique

L'équation de Schrödinger dans un potentiel V :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 \Psi + V\Psi$$

$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}}$, Ψ à valeurs dans \mathbb{C} .

Ψ solution

- $e^{i\theta} \Psi$ solution pour θ **constant**.
- Symétrie **globale**.

L'équation de Schrödinger dans un potentiel électromagnétique (V, \vec{A}) et charge e :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 \Psi + eV\Psi$$

Ψ solution pour (V, \vec{A}) , χ **fonction réelle**.

- $e^{-\frac{ie}{\hbar} \chi} \Psi$ solution pour $\left(V - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \chi \right)$ → \vec{E} et \vec{B} inchangés.
- Symétrie **locale**.

⚠ Cette symétrie affecte **Ψ et (V, \vec{A})** .

(V, \vec{A}) plus fondamental que (\vec{E}, \vec{B}) en MQ.

La naissance des théories de jauge

Des balbutiements aux concepts modernes

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

- **Contre argument d'Einstein.**

Le comportement des horloges dépend du chemin choisi dans cette théorie.

➔ Ce n'est pas la bonne approche.

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

- **Contre argument d'Einstein.**

Le comportement des horloges dépend du chemin choisi dans cette théorie.

➔ Ce n'est pas la bonne approche.

- **Fock 1926 et London 1927 : la fonction d'onde.**

La transformation $\Psi \mapsto e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\Psi$ est accompagnée de $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

- **Contre argument d'Einstein.**

Le comportement des horloges dépend du chemin choisi dans cette théorie.

➔ Ce n'est pas la bonne approche.

- **Fock 1926 et London 1927 : la fonction d'onde.**

La transformation $\Psi \mapsto e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\Psi$ est accompagnée de $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

Schéma :

- Ψ n'est définie qu'à une phase (constante) près.

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

- **Contre argument d'Einstein.**

Le comportement des horloges dépend du chemin choisi dans cette théorie.

➔ Ce n'est pas la bonne approche.

- **Fock 1926 et London 1927 : la fonction d'onde.**

La transformation $\Psi \mapsto e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\Psi$ est accompagnée de $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

Schéma :

- Ψ n'est définie qu'à une phase (constante) près.
- Un changement de phase locale sur Ψ ne laisse pas les équations invariantes.

Des balbutiements aux concepts modernes

- **Weyl 1918 : géométrie conforme.**

Extension de la relativité générale.

La métrique $g_{\mu\nu}$ est définie à un facteur multiplicatif près.

➔ Champ A_μ requis pour que la théorie reste invariante.

Le choix d'une métrique correspond à un "choix de jauge" (calibration).

- **Contre argument d'Einstein.**

Le comportement des horloges dépend du chemin choisi dans cette théorie.

➔ Ce n'est pas la bonne approche.

- **Fock 1926 et London 1927 : la fonction d'onde.**

La transformation $\Psi \mapsto e^{-\frac{ie}{\hbar}\chi}\Psi$ est accompagnée de $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

Schéma :

- Ψ n'est définie qu'à une phase (constante) près.
- Un changement de phase locale sur Ψ ne laisse pas les équations invariantes.
- La variation de jauge du champ électromagnétique A_μ rétablit l'invariance.

Les principes des théories de jauge

- 1 La naissance des théories de jauge
- 2 Les principes des théories de jauge**
- 3 Les mathématiques sous-jacentes
- 4 Problèmes et solutions
- 5 Nouvelles théories de jauge

Théorie des champs classiques relativistes

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

ici $j^\mu = 0$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

ϕ^* est le complexe conjugué de ϕ

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

m est la masse, remarquer le signe $-$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

Matrices de Dirac reliées à la métrique de l'espace-temps

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$


$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$



$$\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$$

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

Transformation $\phi \mapsto e^{ie\chi} \phi$ avec χ constante : $\partial_\mu (e^{ie\chi} \phi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \phi)$.

$\Rightarrow \partial_\mu \phi$ se transforme comme ϕ .

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

Transformation $\phi \mapsto e^{ie\chi} \phi$ avec χ constante : $\partial_\mu (e^{ie\chi} \phi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \phi)$.

$\Rightarrow \partial_\mu \phi$ se transforme comme ϕ .

\mathcal{L}_{KG} (et $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$) sont invariants (grâce à la conjugaison complexe).

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

Transformation $\phi \mapsto e^{ie\chi} \phi$ avec χ constante : $\partial_\mu (e^{ie\chi} \phi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \phi)$.

$\Rightarrow \partial_\mu \phi$ se transforme comme ϕ .

\mathcal{L}_{KG} (et $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$) sont invariants (grâce à la conjugaison complexe).

\Rightarrow **Symétrie globale.**

Théorie des champs classiques relativistes

$\hbar = 1$ et $c = 1$.

Champ électromagnétique : Tenseur de Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

Champ de Klein-Gordon : Champ ϕ à valeurs complexes

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi) \quad \Rightarrow \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

Champs spinoriel de Dirac : Champ ψ à 4 composantes complexes

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi \quad \Rightarrow \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

Transformation $\phi \mapsto e^{ie\chi} \phi$ avec χ constante : $\partial_\mu (e^{ie\chi} \phi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \phi)$.

$\Rightarrow \partial_\mu \phi$ se transforme comme ϕ .

\mathcal{L}_{KG} (et $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$) sont invariants (grâce à la conjugaison complexe).

\Rightarrow **Symétrie globale.**

Peut-on promouvoir cette symétrie globale en une symétrie locale ?

L'électrodynamique

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

Les principes des théories de jauge

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_{\mu}(e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_{\mu}\psi) + (ie\partial_{\mu}\chi)(e^{ie\chi}\psi).$$

Les principes des théories de jauge

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi).$$



Laisse le lagrangien invariant

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi).$$



Ne laisse pas le lagrangien invariant

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \longrightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi).$$

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi).$$

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi)$$

Transformation de A_μ

Transformation de ψ

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \end{aligned}$$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \end{aligned}$$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi).$$

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \chi))(e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi) - e^{ie\chi} (ieA_\mu \psi) - (ie\partial_\mu \chi)(e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$



La phase $e^{ie\chi}$ a "traversé" $(\partial_\mu - ieA_\mu)$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu\psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi$$

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie \partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi).$$

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \chi)) (e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie \partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi) - e^{ie\chi} (ieA_\mu \psi) - (ie \partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu \psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m) \psi$$

↑
"Couplage minimal" entre ψ et le champ A_μ

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu\psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ + ajout de \mathcal{L}_{EM}

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+EM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Dynamique de Maxwell pour le nouveau champ A_μ

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

$$\chi \text{ non constant} \rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi} \psi) = e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi).$$

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu \chi))(e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu \psi) + (ie\partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi) - e^{ie\chi} (ieA_\mu \psi) - (ie\partial_\mu \chi) (e^{ie\chi} \psi) \\ &= e^{ie\chi} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu \psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ + ajout de \mathcal{L}_{EM}

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+EM}} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Contenu de ce lagrangien :

- particule (de Dirac) chargée dans un potentiel électromagnétique A_μ ,
- équation de Maxwell pour la densité de courant $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu\psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ + ajout de \mathcal{L}_{EM}

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+EM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Contenu de ce lagrangien :

- particule (de Dirac) chargée dans un potentiel électromagnétique A_μ ,
- équation de Maxwell pour la densité de courant $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

\rightarrow **théorie de jauge sur le groupe $U(1)$** où $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \rightarrow z = e^{i\chi}$.

L'électrodynamique

On part de $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$.

χ non constant $\rightarrow \partial_\mu (e^{ie\chi}\psi) = e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi)$.

Nouveau champ vectoriel (réel) A_μ qui se transforme comme $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi &\mapsto (\partial_\mu - ie(A_\mu + \partial_\mu\chi))(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu\psi) + (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) - e^{ie\chi}(ieA_\mu\psi) - (ie\partial_\mu\chi)(e^{ie\chi}\psi) \\ &= e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \end{aligned}$$

$\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ se transforme comme ψ .

Substitution $\partial_\mu\psi \mapsto (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ dans $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ + ajout de \mathcal{L}_{EM}

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+EM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Contenu de ce lagrangien :

- particule (de Dirac) chargée dans un potentiel électromagnétique A_μ ,
- équation de Maxwell pour la densité de courant $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

\rightarrow **théorie de jauge sur le groupe $U(1)$** où $U(1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\} \rightarrow z = e^{i\chi}$.

⚠ L'équation $\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$ ne dérive pas du lagrangien !

Conséquence de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

La théorie de Yang-Mills

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

$\rightarrow \phi$ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$$



$$\phi^\dagger = (\phi_1^*, \phi_2^*) \rightarrow \phi^\dagger \phi = \phi_1^* \phi_1 + \phi_2^* \phi_2$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

$\rightarrow \phi$ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$(\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi)$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

$\rightarrow \phi$ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi \quad (U \text{ est constant}) \end{aligned}$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=1} \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=1} \phi \quad (U \text{ est constant}) \end{aligned}$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi && (U \text{ est constant}) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi \quad (U \text{ est constant}) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$ est invariant par cette symétrie globale.

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi \quad (U \text{ est constant}) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

→ $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$ est invariant par cette symétrie globale.

Comment promouvoir cette symétrie globale en une symétrie locale ?

La théorie de Yang-Mills

Yang et Mills, 1954 : ils proposent une théorie de jauge avec le groupe $SU(2)$.

Contexte : succès de QED, théorie de l'isospin pour l'interaction forte.

Rappel sur les groupes : multiplication, élément neutre et inverse.

Les éléments d'un groupe G agissent sur les champs de matière : $\phi \mapsto U\phi$.

→ ϕ à valeurs dans un autre espace que \mathbb{C} .

Exemple :

$SU(2)$ = matrices complexes $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ et $\det U = 1$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad \rightarrow \quad U\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 \\ c\phi_1 + d\phi_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi &\mapsto (\partial_\mu U\phi)^\dagger \partial^\mu (U\phi) - m^2 (U\phi)^\dagger (U\phi) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger U^\dagger U \phi \quad (U \text{ est constant}) \\ &= (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

→ $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$ est invariant par cette symétrie globale.

Comment promouvoir cette symétrie globale en une symétrie locale ?

→ Nouveau champ vectoriel A_μ à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe.

Intermède : algèbres de Lie

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \Rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \Rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \Rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \Rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \Rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \Rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \Rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \Rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \Rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.
- G agit sur les champs : $\phi \mapsto U\phi \Rightarrow \mathfrak{g}$ agit de façon infinitésimale : $\phi \mapsto X\phi$.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \Rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \Rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \Rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.
- G agit sur les champs : $\phi \mapsto U\phi \Rightarrow \mathfrak{g}$ agit de façon infinitésimale : $\phi \mapsto X\phi$.
- G agit sur \mathfrak{g} par l'adjoint : $X \mapsto UXU^{-1}$.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \Rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \Rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \Rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.
- G agit sur les champs : $\phi \mapsto U\phi \Rightarrow \mathfrak{g}$ agit de façon infinitésimale : $\phi \mapsto X\phi$.
- G agit sur \mathfrak{g} par l'adjoint : $X \mapsto UXU^{-1}$.
- U fonction à valeurs dans $G \Rightarrow (\partial_\mu U)U^{-1} = -U(\partial_\mu U^{-1})$ fonction à valeurs dans \mathfrak{g} .

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.
- G agit sur les champs : $\phi \mapsto U\phi \rightarrow \mathfrak{g}$ agit de façon infinitésimale : $\phi \mapsto X\phi$.
- G agit sur \mathfrak{g} par l'adjoint : $X \mapsto UXU^{-1}$.
- U fonction à valeurs dans $G \rightarrow (\partial_\mu U)U^{-1} = -U(\partial_\mu U^{-1})$ fonction à valeurs dans \mathfrak{g} .

Exemple de $U(1)$: algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, crochet nul.

\rightarrow groupe abélien et algèbre de Lie abélienne.

Intermède : algèbres de Lie

Groupe de Lie $G \rightarrow$ son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

- \mathfrak{g} est l'ensemble des générateurs infinitésimaux du groupe.
- Espace vectoriel \rightarrow base $\{T_a\}$, $a = 1, \dots, n \rightarrow X = X^a T_a \in \mathfrak{g}$.
- Crochet de Lie : $[X, Y] = -[Y, X]$ et identité de Jacobi.
- G agit sur les champs : $\phi \mapsto U\phi \rightarrow \mathfrak{g}$ agit de façon infinitésimale : $\phi \mapsto X\phi$.
- G agit sur \mathfrak{g} par l'adjoint : $X \mapsto UXU^{-1}$.
- U fonction à valeurs dans $G \rightarrow (\partial_\mu U)U^{-1} = -U(\partial_\mu U^{-1})$ fonction à valeurs dans \mathfrak{g} .

Exemple de $U(1)$: algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R}$, crochet nul.

\rightarrow groupe abélien et algèbre de Lie abélienne.

Exemple de $SU(2)$: algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$,

espace des matrices complexes $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $X^\dagger = -X$ et $\text{tr} X = a + d = 0$.

Crochet de Lie : commutateur des matrices, $[X, Y] = XY - YX$.

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi)$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi)$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi)$$



Ce terme n'a pas un sens évident

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$



Cette quantité est dans l'algèbre de Lie

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ **à valeurs dans \mathfrak{g}** pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$



Cas $U(1)$ avec $U = e^{ie\chi}$: on retrouve $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi)$$

Transformation de A_μ

Transformation de ϕ

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \end{aligned}$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi)$$

$$= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi)$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

→ $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ se transforme comme ϕ .

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On **suppose** qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

→ $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ se transforme comme ϕ .

$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$ dans les lagrangiens ("couplage minimal") :

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On suppose qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

→ $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ se transforme comme ϕ .

$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$ dans les lagrangiens ("couplage minimal") :

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \frac{1}{2} m^2 \phi^\dagger \phi$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On suppose qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

→ $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ se transforme comme ϕ .

$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$ dans les lagrangiens ("couplage minimal") :

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \frac{1}{2} m^2 \phi^\dagger \phi$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi$$

La théorie de Yang-Mills : le couplage minimal

Transformation $\phi \mapsto U\phi$ avec U non constant.

$$\partial_\mu(U\phi) = (\partial_\mu U)\phi + U(\partial_\mu\phi) = (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi)$$

→ $\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} ((\partial_\mu\phi)^\dagger \partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi)$ non invariant par $\phi \mapsto U\phi$.

Nouveau champ vectoriel $A_\mu = A_\mu^a T_a$ à valeurs dans \mathfrak{g} pour compenser $(\partial_\mu U)U^{-1}$.

On suppose qu'il se transforme comme :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi &\mapsto (\partial_\mu - ie[UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})])(U\phi) \\ &= (\partial_\mu U)U^{-1}(U\phi) + U(\partial_\mu\phi) + U(-ieA_\mu\phi) + U(\partial_\mu U^{-1})(U\phi) \\ &= U(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

→ $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ se transforme comme ϕ .

$\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$ dans les lagrangiens ("couplage minimal") :

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \frac{1}{2} m^2 \phi^\dagger \phi$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi$$

Lagrangiens invariants par l'action de U sur ϕ , ψ et A_μ simultanément.

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Les principes des théories de jauge

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$



Crochet nul dans le cas $U(1)$

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \Rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$



$$UF_{\mu\nu}U^{-1} = F_{\mu\nu} \text{ dans le cas } U(1)$$

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

Scalaire (invariant) défini à l'aide d'une trace sur \mathfrak{g} :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

$$\text{tr}(UXU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}UX) = \text{tr}(X)$$

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

Scalaire (invariant) défini à l'aide d'une trace sur \mathfrak{g} :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\text{tr}(UXU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}UX) = \text{tr}(X)$$

Lagrangiens totaux :

$$\mathcal{L}_{\text{KG+YM}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - m^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+YM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

Scalaire (invariant) défini à l'aide d'une trace sur \mathfrak{g} :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\text{tr}(UXU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}UX) = \text{tr}(X)$$

Lagrangiens totaux :

$$\mathcal{L}_{\text{KG+YM}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - m^2\phi^\dagger\phi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+YM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

\rightarrow Théories de jauge $SU(2)$.

La théorie de Yang-Mills : la dynamique

Dynamique de $A_\mu \rightarrow$ il faut l'équivalent de $F_{\mu\nu}$.

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ non satisfaisante : $A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$ produit des dérivées en U .

Yang et Mills proposent :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Alors :

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

Scalaire (invariant) défini à l'aide d'une trace sur \mathfrak{g} :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

$$\text{tr}(UXU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}UX) = \text{tr}(X)$$

Lagrangiens totaux :

$$\mathcal{L}_{\text{KG+YM}} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^\dagger [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac+YM}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi + \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

\rightarrow Théories de jauge $SU(2)$.

Avec cette dynamique, les A_μ sont des champs sans masse.

\rightarrow Termes de masse incompatibles avec l'invariance de jauge.

Les théories de jauge en physique

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les A_μ^a sont les **champs de jauge** ➔ **bosons d'interaction** après quantification.

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les A_μ^a sont les **champs de jauge** ➔ **bosons d'interaction** après quantification.

Le Modèle Standard des particules élémentaires est basé sur des théories de jauge.

Le groupe utilisé est : $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les A_μ^a sont les **champs de jauge** ➔ **bosons d'interaction** après quantification.

Le Modèle Standard des particules élémentaires est basé sur des théories de jauge.

Le groupe utilisé est : $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

↑
Interaction électro-faible

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les A_μ^a sont les **champs de jauge** ➔ **bosons d'interaction** après quantification.

Le Modèle Standard des particules élémentaires est basé sur des théories de jauge.

Le groupe utilisé est : $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

↑
Interaction forte (chromodynamique)

Les théories de jauge en physique

● Économie dans les principes

- groupe de symétries globales promu en un groupe de symétries locales ;
- action de ce groupe sur les champs de matière.
- couplage minimal : $\partial_\mu \mapsto \partial_\mu - ieA_\mu$
- dynamique du champ d'interaction A_μ par l'invariant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$

● Théories renormalisables

➔ Preuve basée sur la symétrie de jauge.

● Symétrie de jauge passive ou active ?

- Symétrie de jauge passive : conséquence d'une paramétrisation locale.
- Symétrie de jauge active : le groupe "bouge" les objets mathématiques.

Les A_μ^a sont les **champs de jauge** ➔ **bosons d'interaction** après quantification.

Le Modèle Standard des particules élémentaires est basé sur des théories de jauge.

Le groupe utilisé est : $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

⚠ Le $U(1)$ n'est pas celui de l'électromagnétisme...

Les mathématiques sous-jacentes

- 1 La naissance des théories de jauge
- 2 Les principes des théories de jauge
- 3 Les mathématiques sous-jacentes**
- 4 Problèmes et solutions
- 5 Nouvelles théories de jauge

Fibré principal et fibré vectoriel

Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

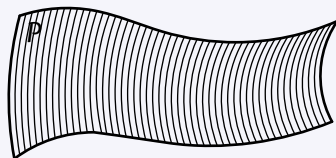
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.



Les mathématiques sous-jacentes

No

Fib



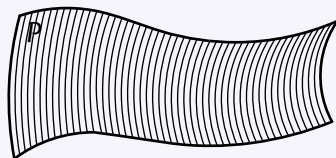
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.



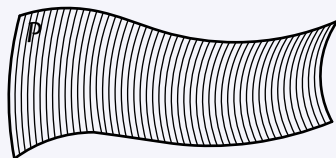
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .



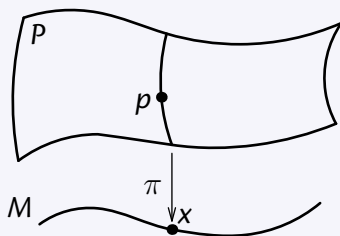
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
➔ $M \simeq$ espace-temps.



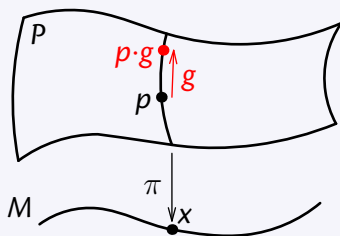
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
➔ $M \simeq$ espace-temps.
- Le groupe G agit à droite sur P le long des fibres.
➔ $p \mapsto p \cdot g$ pour $g \in G$.



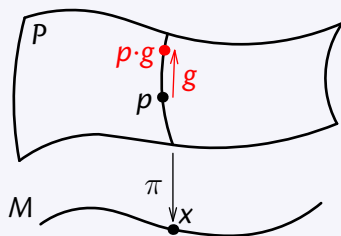
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
➔ $M \simeq$ espace-temps.
- Le groupe G agit à droite sur P le long des fibres.
➔ $p \mapsto p \cdot g$ pour $g \in G$.



Fibré vectoriel associé

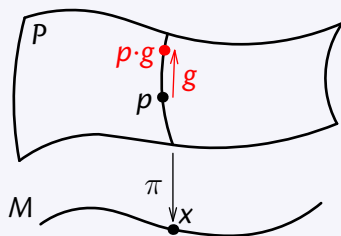
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
 - ➔ $M \simeq$ espace-temps.
- Le groupe G agit à droite sur P le long des fibres.
 - ➔ $p \mapsto p \cdot g$ pour $g \in G$.



Fibré vectoriel associé

F un espace vectoriel sur lequel G agit (linéairement).

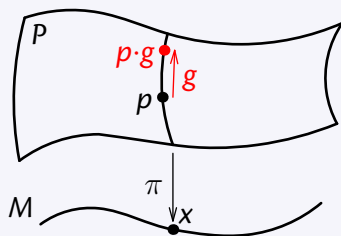
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
 - ➔ $M \simeq$ espace-temps.
- Le groupe G agit à droite sur P le long des fibres.
 - ➔ $p \mapsto p \cdot g$ pour $g \in G$.



Fibré vectoriel associé

F un espace vectoriel sur lequel G agit (linéairement).

On peut construire un fibré E de fibre F qui reprenne la structure de P .

(\simeq remplacer dans P les fibres G par les fibres F)

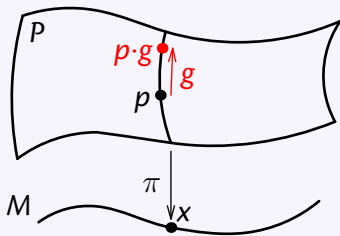
Fibré principal et fibré vectoriel

Notion de fibrés : Seifert 1932, Whitney 1935–1940.

➔ Antérieur à Yang-Mills...

Fibré principal (Ehresmann, 1941)

- L'espace P est la réunion d'une fibre type.
- La fibre type est un groupe de Lie G .
- Chaque fibre se projette par π sur la base de P .
➔ $M \simeq$ espace-temps.
- Le groupe G agit à droite sur P le long des fibres.
➔ $p \mapsto p \cdot g$ pour $g \in G$.



Fibré vectoriel associé

F un espace vectoriel sur lequel G agit (linéairement).

On peut construire un fibré E de fibre F qui reprenne la structure de P .

(\simeq remplacer dans P les fibres G par les fibres F)

Champs de matière ϕ (et ψ) :

application $\phi : M \rightarrow E$ telles que $\phi(x)$ dans la fibre au dessus de $x \in M$.

➔ ϕ est une **section** de E .

Verticalité, horizontalité et connexion

Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

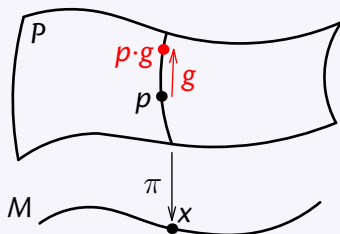
Penser au vecteur "vitesse"...

Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.



Verticalité, horizontalité et connexion

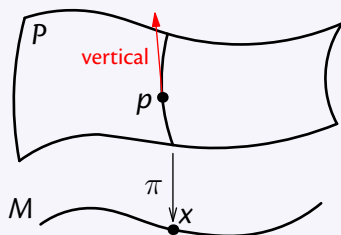
En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.

g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .



Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

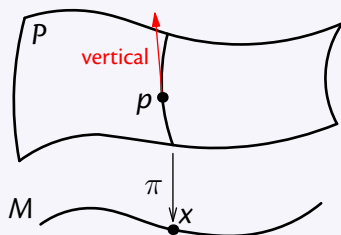
Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.

g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .

Il n'y a pas de notion naturelle d'horizontalité.



Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

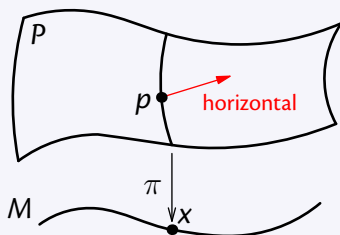
G déplace les points le long des fibres.

g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .

Il n'y a pas de notion naturelle d'horizontalité.

Une **connexion** sur P est la donnée d'une horizontalité (Ehresmann, 1951).



Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.

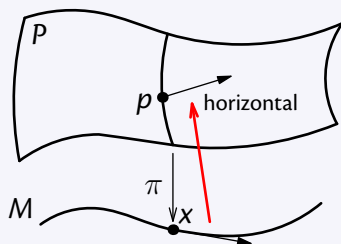
g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .

Il n'y a pas de notion naturelle d'horizontalité.

Une **connexion** sur P est la donnée d'une horizontalité (Ehresmann, 1951).

Horizontalité = relèvement horizontal.



Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.

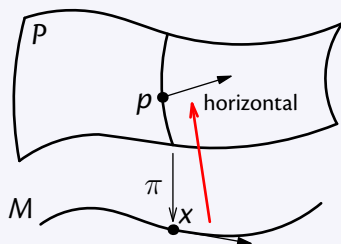
g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .

Il n'y a pas de notion naturelle d'horizontalité.

Une **connexion** sur P est la donnée d'une horizontalité (Ehresmann, 1951).

Horizontalité = relèvement horizontal.



Une connexion sur P peut être caractérisée par un objet algébrique :

les A_μ de Yang-Mills à valeurs dans \mathfrak{g} .

Verticalité, horizontalité et connexion

En géométrie, un déplacement infinitésimal est un vecteur tangent.

Penser au vecteur "vitesse"...

G déplace les points le long des fibres.

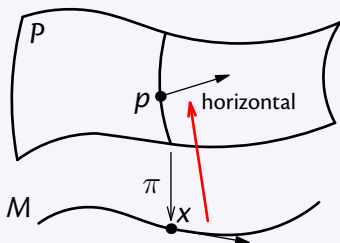
g "déplace" infinitésimalement les points de P :

→ g induit tous les vecteurs verticaux de P .

Il n'y a pas de notion naturelle d'horizontalité.


Une **connexion** sur P est la donnée d'une horizontalité (Ehresmann, 1951).

Horizontalité = relèvement horizontal.



Une connexion sur P peut être caractérisée par un objet algébrique :

les A_μ de Yang-Mills à valeurs dans \mathfrak{g} .

$F_{\mu\nu}$ est la **courbure** de A_μ : mesure une obstruction au relèvement horizontal .

Dérivée covariante

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

→ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

➔ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section

➔ $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ définit une section.

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

- ➔ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section
- ➔ $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ définit une section.

Dérivée covariante sur les sections de E :

- ∂_μ exprime un déplacement (infinitésimal) le long de M ;
- A_μ exprime une "rotation" (infinitésimale) dans la fibre.

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

- ➔ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section
- ➔ $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ définit une section.

Dérivée covariante sur les sections de E :

- ∂_μ exprime un déplacement (infinitésimal) le long de M ;
- A_μ exprime une "rotation" (infinitésimale) dans la fibre.

La dérivée covariante est un déplacement infinitésimal dans le fibré E .

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

- ➔ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section
- ➔ $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ définit une section.

Dérivée covariante sur les sections de E :

- ∂_μ exprime un déplacement (infinitésimal) le long de M ;
- A_μ exprime une "rotation" (infinitésimale) dans la fibre.

La dérivée covariante est un déplacement infinitésimal dans le fibré E .

Identité de Bianchi : $D_\xi F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\xi} + D_\nu F_{\xi\mu} = 0$ est toujours vraie.

Dérivée covariante

E fibré vectoriel de fibre F associé à P .

ϕ section de E :

- ➔ $\partial_\mu \phi$ ne définit pas une section
- ➔ $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$ définit une section.

Dérivée covariante sur les sections de E :

- ∂_μ exprime un déplacement (infinitésimal) le long de M ;
- A_μ exprime une "rotation" (infinitésimale) dans la fibre.

La dérivée covariante est un déplacement infinitésimal dans le fibré E .

Identité de Bianchi : $D_\xi F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\xi} + D_\nu F_{\xi\mu} = 0$ est toujours vraie.

- ➔ $\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$ dans le cas $U(1)$ (électromagnétisme).
- ➔ La moitié des équations de Maxwell est d'origine structurelle.

Le groupe de jauge

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge...

- ... agit sur les points de P en préservant les fibres.

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge...

- ... agit sur les points de P en préservant les fibres.
- ... agit sur l'espace des connexions :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1})$$

$$F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge...

- ... agit sur les points de P en préservant les fibres.
- ... agit sur l'espace des connexions :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1}) \qquad F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

- ... agit sur les champs de matières : $\phi \mapsto U\phi$.
 ➔ Action compatible avec la dérivée covariante : $D_\mu \phi \mapsto U(D_\mu \phi)$.

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge...

- ... agit sur les points de P en préservant les fibres.
- ... agit sur l'espace des connexions :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1}) \qquad F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

- ... agit sur les champs de matières : $\phi \mapsto U\phi$.
 ➔ Action compatible avec la dérivée covariante : $D_\mu \phi \mapsto U(D_\mu \phi)$.

C'est l'implémentation de la **symétrie de jauge active**.

Le groupe de jauge

Groupe de jauge : groupe des automorphismes verticaux de P .

Le groupe de jauge...

- ... agit sur les points de P en préservant les fibres.
- ... agit sur l'espace des connexions :

$$A_\mu \mapsto UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U(\partial_\mu U^{-1}) \qquad F_{\mu\nu} \mapsto UF_{\mu\nu}U^{-1}$$

- ... agit sur les champs de matières : $\phi \mapsto U\phi$.
 ➔ Action compatible avec la dérivée covariante : $D_\mu \phi \mapsto U(D_\mu \phi)$.

C'est l'implémentation de la **symétrie de jauge active**.

Le fibré principal P renferme les symétries de jauge (locales) de la théorie.

L'interaction fondamentale

L'interaction fondamentale

A_μ , $F_{\mu\nu}$, ϕ , ψ , et $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ sont parfaitement identifiés mathématiquement.

L'interaction fondamentale

A_μ , $F_{\mu\nu}$, ϕ , ψ , et $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ sont parfaitement identifiés mathématiquement.

Dictionnaire établi seulement dans les années 1970! ➡ boson d'interaction très lent...

L'interaction fondamentale

A_μ , $F_{\mu\nu}$, ϕ , ψ , et $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ sont parfaitement identifiés mathématiquement.

Dictionnaire établi seulement dans les années 1970! ➡ boson d'interaction très lent...

fibré principal P + connexion A_μ + fibré vectoriel associé E

L'interaction fondamentale

A_μ , $F_{\mu\nu}$, ϕ , ψ , et $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ sont parfaitement identifiés mathématiquement.
Dictionnaire établi seulement dans les années 1970! \rightarrow boson d'interaction très lent...

fibré principal P + connexion A_μ + fibré vectoriel associé E

Physique		Mathématiques
champ vectoriel A_μ	\leftrightarrow	connexion sur P (horizontalité)
champ tensoriel $F_{\mu\nu}$	\leftrightarrow	courbure de la connexion (obstruction géométrique)
transformation de jauge active	\leftrightarrow	automorphisme vertical de P (groupe de jauge)
transformation de jauge passive	\leftrightarrow	recollement de trivialisations locales (choix de repères locaux)
champ de matière ϕ ou ψ	\leftrightarrow	section d'un fibré vectoriel associé E (structure spinorielle si nécessaire)
$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$	\leftrightarrow	dérivée covariante (déplacement infinitésimal dans E)

Problèmes et solutions

- 1 La naissance des théories de jauge
- 2 Les principes des théories de jauge
- 3 Les mathématiques sous-jacentes
- 4 Problèmes et solutions**
- 5 Nouvelles théories de jauge

Quelques problèmes des théories de jauge

Quelques problèmes des théories de jauge

① La quantification

Problème : La théorie admet une symétrie de dimension infinie.

➔ Forte redondance de configurations identiques.

Quelques problèmes des théories de jauge

① La quantification

Problème : La théorie admet une symétrie de dimension infinie.

➔ Forte redondance de configurations identiques.

Solution : Fixage de jauge.

➔ Fantômes et anti-fantômes, symétrie BRST...

Quelques problèmes des théories de jauge

1 La quantification

Problème : La théorie admet une symétrie de dimension infinie.

➔ Forte redondance de configurations identiques.

Solution : Fixage de jauge.

➔ Fantômes et anti-fantômes, symétrie BRST...

2 La masse des bosons d'interaction

Problème : Les bosons de l'interaction faible sont massifs (expérience).

Les lagrangiens des théories de jauge sont impitoyables : pas de masse !

Quelques problèmes des théories de jauge

1 La quantification

Problème : La théorie admet une symétrie de dimension infinie.

➔ Forte redondance de configurations identiques.

Solution : Fixage de jauge.

➔ Fantômes et anti-fantômes, symétrie BRST...

2 La masse des bosons d'interaction

Problème : Les bosons de l'interaction faible sont massifs (expérience).

Les lagrangiens des théories de jauge sont impitoyables : pas de masse !

Solution : La **brisure spontanée de symétrie** (Brout-Englert-Higgs, 1964).

➔ Prix Nobel de Physique 2013 pour les survivants...

Quelques problèmes des théories de jauge

1 La quantification

Problème : La théorie admet une symétrie de dimension infinie.

➔ Forte redondance de configurations identiques.

Solution : Fixage de jauge.

➔ Fantômes et anti-fantômes, symétrie BRST...

2 La masse des bosons d'interaction

Problème : Les bosons de l'interaction faible sont massifs (expérience).

Les lagrangiens des théories de jauge sont impitoyables : pas de masse !

Solution : La **brisure spontanée de symétrie** (Brout-Englert-Higgs, 1964).

➔ Prix Nobel de Physique 2013 pour les survivants...

➔ Les théories de jauge ne se limitent pas aux A_μ ...

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Modification du lagrangien KG + EM :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2\right)$$

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2 \text{ potentiel pour } \phi$$

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Modification du lagrangien KG + EM :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2\right)$$

$\lambda > 0 \rightarrow$ le potentiel a un minimum.

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

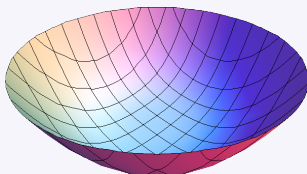
Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Modification du lagrangien KG + EM :

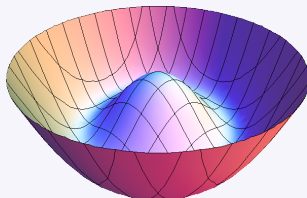
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2\right)$$

$\lambda > 0 \rightarrow$ le potentiel a un minimum.

Deux configurations possibles pour $V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2$:



$$\mu^2 < 0$$



$$\mu^2 > 0$$

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

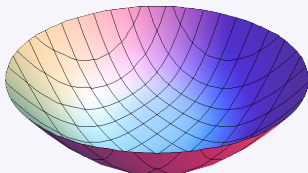
Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Modification du lagrangien KG + EM :

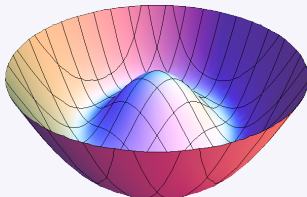
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2\right)$$

$\lambda > 0 \rightarrow$ le potentiel a un minimum.

Deux configurations possibles pour $V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2$:



$$\mu^2 < 0$$



$$\mu^2 > 0$$

Cas $\mu^2 < 0$: $\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi$ est un terme de masse pour ϕ , minimum unique de $V(\phi)$: $\phi_0 = 0$.

Brisure spontanée de symétrie : le lagrangien

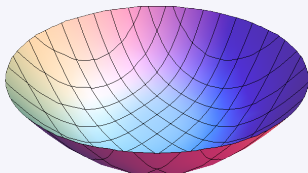
Symétrie de jauge $U(1)$, champ complexe ϕ .

Modification du lagrangien KG + EM :

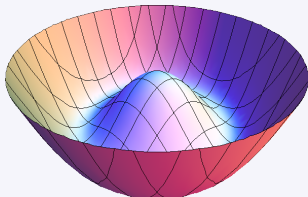
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi]^* [(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2\right)$$

$\lambda > 0 \rightarrow$ le potentiel a un minimum.

Deux configurations possibles pour $V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi + \frac{\lambda}{4!}(\phi^*\phi)^2$:



$$\mu^2 < 0$$



$$\mu^2 > 0$$

Cas $\mu^2 < 0$: $\frac{\mu^2}{2}\phi^*\phi$ est un terme de masse pour ϕ , minimum unique de $V(\phi)$: $\phi_0 = 0$.

Cas $\mu^2 > 0$: minimum dégénéré de $V(\phi)$: $\phi_0 = ve^{i\theta}$ avec $v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

↑
Terme de masse pour les champs A_μ

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

↑
Terme de masse pour le champ φ

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Termes d'interaction entre A_μ et φ + potentiel en φ

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Propriétés de ce Lagrangien “brisé” :

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Propriétés de ce Lagrangien “brisé” :

- Champs A_μ massifs.

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Propriétés de ce Lagrangien “brisé” :

- Champs A_μ massifs.
- Symétrie réduite : $U(1)$ n'agit plus.

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Propriétés de ce Lagrangien “brisé” :

- Champs A_μ massifs.
- Symétrie réduite : $U(1)$ n'agit plus.
- Champ massif φ couplé aux A_μ \rightarrow visible dans les expériences.

Brisure spontanée de symétrie : $\mu^2 > 0$

On choisit un minimum particulier $\phi_0 = v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ (donc $\theta = 0$).

Changement de variables : $\phi = e^{i\chi}(v + \varphi)$ avec φ réel (> 0) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + W(\varphi, A_\mu)$$

Propriétés de ce Lagrangien "brisé" :

- Champs A_μ massifs.
- Symétrie réduite : $U(1)$ n'agit plus.
- Champ massif φ couplé aux $A_\mu \rightarrow$ visible dans les expériences.

Le Modèle Standard des particules élémentaires ($\simeq 1970$) :

- Groupe d'origine : $U(1) \times SU(2) \rightarrow$ 4 bosons d'interaction.
- Champs auxiliaire : ϕ à valeurs dans $\mathbb{C}^2 \rightarrow$ on "brise" $SU(2)$.
- Symétrie réduite à un $U(1)$ (différent de celui du départ).
- 1 boson d'interaction sans masse : le photon \rightarrow électromagnétisme.
3 bosons d'interaction avec masses : W_μ^+ , W_μ^- et $Z_\mu^0 \rightarrow$ force faible.
- Toutes les particules élémentaires ont une masse issue de ce mécanisme :
électron, muons, tau, neutrinos, quarks...
- Il reste un champ H venant de ϕ : c'est la particule de Higgs détectée au CERN.

Une solution peu satisfaisante

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

- Les champs ϕ n'ont pas d'origine géométrique naturelle.

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

- Les champs ϕ n'ont pas d'origine géométrique naturelle.
- Dans le Modèle Standard, on a la correspondance :

type de particule	statistique	structure mathématique
particules d'interaction	↔ bosons	↔ connexion sur le fibré principal
particules de matière	↔ fermions	↔ section d'un fibré vectoriel associé

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

- Les champs ϕ n'ont pas d'origine géométrique naturelle.
- Dans le Modèle Standard, on a la correspondance :

type de particule	statistique	structure mathématique
particules d'interaction	↔ bosons	↔ connexion sur le fibré principal
particules de matière	↔ fermions	↔ section d'un fibré vectoriel associé

Les champs ϕ sont à la fois bosons et section d'un fibré vectoriel associé.

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

- Les champs ϕ n'ont pas d'origine géométrique naturelle.
- Dans le Modèle Standard, on a la correspondance :

type de particule	statistique	structure mathématique
particules d'interaction	↔ bosons	↔ connexion sur le fibré principal
particules de matière	↔ fermions	↔ section d'un fibré vectoriel associé

Les champs ϕ sont à la fois bosons et section d'un fibré vectoriel associé.

- Le potentiel $V(\phi)$ est "défini à la main".

Une solution peu satisfaisante

Problèmes conceptuels :

- Les champs ϕ n'ont pas d'origine géométrique naturelle.
- Dans le Modèle Standard, on a la correspondance :

type de particule	statistique	structure mathématique
particules d'interaction	↔ bosons	↔ connexion sur le fibré principal
particules de matière	↔ fermions	↔ section d'un fibré vectoriel associé

Les champs ϕ sont à la fois bosons et section d'un fibré vectoriel associé.

- Le potentiel $V(\phi)$ est "défini à la main".

Il est possible de résoudre ces problèmes dans d'autres cadres mathématiques :

- Les champs auxiliaires ϕ sont des composantes de connexions généralisées.
 - ➔ origine "géométrico-algébrique", première ligne du tableau.
- Le potentiel $V(\phi)$ est naturellement donné par la généralisation de $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$.

Nouvelles théories de jauge

- 1 La naissance des théories de jauge
- 2 Les principes des théories de jauge
- 3 Les mathématiques sous-jacentes
- 4 Problèmes et solutions
- 5 Nouvelles théories de jauge**

La géométrie non commutative

La géométrie non commutative

La philosophie de la GNC :

La géométrie non commutative

La philosophie de la GNC :

- 1 On remplace l'étude d'une structure topologique ou géométrique par l'étude d'une algèbre de fonctions.

La géométrie non commutative

La philosophie de la GNC :

- 1 On remplace l'étude d'une structure topologique ou géométrique par l'étude d'une algèbre de fonctions.
- 2 On développe des outils d'étude qui ne sont pas sensibles à la commutativité de ces algèbres de fonctions.

La géométrie non commutative

La philosophie de la GNC :

- 1 On remplace l'étude d'une structure topologique ou géométrique par l'étude d'une algèbre de fonctions.
- 2 On développe des outils d'étude qui ne sont pas sensibles à la commutativité de ces algèbres de fonctions.
- 3 On applique ces outils à des algèbres plus générales (non commutatives) comme si elles étaient des algèbres de fonctions.

La géométrie non commutative

La philosophie de la GNC :

- 1 On remplace l'étude d'une structure topologique ou géométrique par l'étude d'une algèbre de fonctions.
- 2 On développe des outils d'étude qui ne sont pas sensibles à la commutativité de ces algèbres de fonctions.
- 3 On applique ces outils à des algèbres plus générales (non commutatives) comme si elles étaient des algèbres de fonctions.



Faire des théories de jauge sans espace ?

Théories de jauge non commutatives

Nouvelles théories de jauge

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .

$\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.

$d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p(d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.

➔ **structure différentiable** sur \mathbf{A} .

Construction non canonique ➔ plusieurs approches à la GNC.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p(d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
 ➔ **structure différentiable** sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique ➔ plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} ➔ **champs de matière**.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière**.

Connexion non commutative :

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière**.

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
 ➔ **structure différentiable** sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique ➔ plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} ➔ **champs de matière**.

Connexion non commutative :

Application $\nabla: \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.

$\nabla: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^1$ généralise D_μ

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla: \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.

Courbure, $\nabla^2: \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.

Courbure, $\nabla^2 : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→ $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.**

"Multiplication" par $F_{\mu\nu}$

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.
 Courbure, $\nabla^2 : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Groupe de jauge :

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p(d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla: \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.
 Courbure, $\nabla^2: \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Groupe de jauge :

Groupe des automorphismes Φ de \mathbf{M} en tant que module : $\Phi(ma) = \Phi(m)a$.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.
 Courbure, $\nabla^2 : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Groupe de jauge :

Groupe des automorphismes Φ de \mathbf{M} en tant que module : $\Phi(ma) = \Phi(m)a$.
 Action sur les connexions : $\nabla^\Phi = \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}$.

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p (d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.
 Courbure, $\nabla^2 : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Groupe de jauge :

Groupe des automorphismes Φ de \mathbf{M} en tant que module : $\Phi(ma) = \Phi(m)a$.
 Action sur les connexions : $\nabla^\Phi = \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}$.

Lagrangien :

Théories de jauge non commutatives

Ingrédients :

- Une algèbre associative \mathbf{A} , si possible non commutative.
- Un calcul différentiel (Ω^\bullet, d) sur \mathbf{A} .
 $\Omega^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$ est une algèbre graduée telle que $\Omega^0 = \mathbf{A}$.
 $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ une différentielle : $d(\omega_p \eta_q) = (d\omega_p)\eta_q + (-1)^p \omega_p(d\eta_q)$ et $d^2 = 0$.
→ structure différentiable sur \mathbf{A} .
 Construction non canonique **→** plusieurs approches à la GNC.
- Un module à droite \mathbf{M} (projectif de type fini) sur \mathbf{A} : pour $a \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbf{M}$, $ma \in \mathbf{M}$.
 Module = représentation de \mathbf{A} **→ champs de matière.**

Connexion non commutative :

Application $\nabla : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+1}$ telle que $\nabla(m \otimes \omega_p) = (\nabla m)\omega_p + m \otimes d\omega_p$.
 Courbure, $\nabla^2 : \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^p \rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega^{p+2}$ **→** $\nabla^2(m \otimes \omega_p) = (\nabla^2 m)\omega_p$.

Groupe de jauge :

Groupe des automorphismes Φ de \mathbf{M} en tant que module : $\Phi(ma) = \Phi(m)a$.
 Action sur les connexions : $\nabla^\Phi = \Phi \circ \nabla \circ \Phi^{-1}$.

Lagrangien :

Lagrangien construit à partir de la courbure de ∇ en généralisant $\text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\dots$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.

↑
Calcul différentiel ordinaire sur M : de Rham

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.

↑
Calcul différentiel complètement algébrique : $M_n(\mathbb{C}) \otimes \bigwedge^\bullet \mathfrak{sl}_n^*$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Généralisation de A_μ : 1-forme de connexion

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla \mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla \mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Généralisation de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + U dU^{-1}$.

Généralisation de $UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{e}U(\partial_\mu U^{-1})$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq \mathbf{A}_\mu + \phi$

Partie spatiale, à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$: semblable à une connexion ordinaire

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\Rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\Rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \Rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow$ symétrie locale \Rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$



Partie algébrique, dans $C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_n^*$, nouveau

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie[A_\mu, A_\nu]$$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Dérivée covariante de ϕ le long de A_μ

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.



Polynôme en ϕ : terme purement algébrique (pas de dérivées)

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi) + V(\phi)$.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi) + V(\phi)$.

Dynamique du champ A_μ : comme dans Yang-Mills

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla \mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla \mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu \phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi) + V(\phi)$.

Couplage des champs ϕ aux champs A_μ

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla \mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla \mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu \phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi) + V(\phi)$.

Potentiel pour ϕ complètement algébrique, $V \simeq P^2$

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi) + V(\phi)$.

$V(\phi)$ a des configurations minimales pour des ϕ_0 non nuls.

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi) + V(\phi)$.

$V(\phi)$ a des configurations minimales pour des ϕ_0 non nuls.

Report de ϕ_0 dans $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi \rightarrow$ termes de masse pour les A_μ .

Exemple d'une théorie de jauge non commutative

M variété différentiable, $M_n(\mathbb{C})$ algèbre des matrices $n \times n$ sur \mathbb{C} .

- $\mathbf{A} = C^\infty(M) \otimes M_n(\mathbb{C})$, fonctions différentiables $M \rightarrow M_n(\mathbb{C})$.
- Calcul différentiel : $\Omega_{\text{Der}}^\bullet(\mathbf{A})$ construit à partir des dérivations de \mathbf{A} .
Décomposition en deux blocs : $\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega_{\text{Der}}^\bullet(M_n(\mathbb{C}))$.
- Module : $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, l'algèbre elle-même $\rightarrow \mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A}) = \Omega_{\text{Der}}^p(\mathbf{A})$.

$\mathbb{1}$: fonction constante égale à la matrice identité. $\rightarrow a = \mathbb{1}a$ dans \mathbf{M} .

$\nabla a = \nabla(\mathbb{1}a) = (\nabla\mathbb{1})a + \mathbb{1} \otimes da \rightarrow \nabla$ définie par $\nabla\mathbb{1} = \omega \in \Omega_{\text{Der}}^1(\mathbf{A})$.

Courbure : $\nabla^2(a) = (d\omega + \omega^2)a$.

Groupe de jauge : éléments inversibles $U = \Phi(\mathbb{1}) \in \mathbf{A}$, $\Phi(a) = Ua$.

$U : M \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow$ symétrie locale \rightarrow théorie de jauge.

Action : $\nabla^\Phi(\mathbb{1}) = \omega^U = U\omega U^{-1} + UdU^{-1}$.

1-forme de connexion : $\omega \simeq A_\mu + \phi$

2-forme de courbure : $d\omega + \omega^2 \simeq F_{\mu\nu} + D_\mu\phi + P(\phi)$.

Lagrangien : $\mathcal{L} = \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{tr}((D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi) + V(\phi)$.

$V(\phi)$ a des configurations minimales pour des ϕ_0 non nuls.

Report de ϕ_0 dans $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi \rightarrow$ termes de masse pour les A_μ .

\rightarrow **Brisure spontanée de symétrie : ϕ dans la connexion, $V(\phi)$ déduit.**

Les algèbroïdes de Lie transitifs

Les algèbroïdes de Lie transitifs

Algèbroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique.**
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique.**
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre.**

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algébroïde de Lie transitif (Atiyah).

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique.**
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique.**
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre.**

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algébroïde de Lie transitif (Atiyah).

\mathcal{A} est l'espace des champs de vecteurs projectables sur $\Gamma(TM)$

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique.**
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique.**
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre.**

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algébroïde de Lie transitif (Atiyah).

\mathcal{L} est un sous espace des champs de vecteurs verticaux

Les algèbroïdes de Lie transitifs

Algèbroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algèbroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algèbroïde de Lie transitif (Atiyah).

➔ **Les connexions ordinaires sont incluses dans les connexions généralisées.**

Les algèbroïdes de Lie transitifs

Algèbroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique.**
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique.**
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre.**

Avec un algèbroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algèbroïde de Lie transitif (Atiyah).

➔ **Les connexions ordinaires sont incluses dans les connexions généralisées.**

➔ **Extension directe du cadre mathématique des fibrés principaux avec connexions.**

Les algèbroïdes de Lie transitifs

Algèbroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algèbroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algèbroïde de Lie transitif (Atiyah).

➔ **Les connexions ordinaires sont incluses dans les connexions généralisées.**

➔ **Extension directe du cadre mathématique des fibrés principaux avec connexions.**

Lagrangiens naturels de type Yang-Mills-Higgs ➔ **brisure spontanée de symétrie.**

Les algébroïdes de Lie transitifs

Algébroïde de Lie transitif : généralisation de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM) \longrightarrow 0$$

- $\Gamma(TM)$ = champs de vecteurs sur M : **structure géométrique**.
- \mathcal{L} = sections d'un fibré en algèbres de Lie : **structure algébrique**.
- \mathcal{A} = algèbre de Lie et module sur $C^\infty(M)$: **géométrie + algèbre**.

Avec un algébroïde de Lie transitif on peut :

- construire un calcul différentiel qui généralise celui de de Rham ;
- définir une théorie des représentations sur des fibrés vectoriels ;
- définir des connexions généralisées.

Tout fibré principal $\pi : P \rightarrow M$ définit un algébroïde de Lie transitif (Atiyah).

➔ **Les connexions ordinaires sont incluses dans les connexions généralisées.**

➔ **Extension directe du cadre mathématique des fibrés principaux avec connexions.**

Lagrangiens naturels de type Yang-Mills-Higgs ➔ **brisure spontanée de symétrie.**

Bonus : structures "à la BRST" dans le formalisme...

La substance des théories de jauge généralisées

La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

- Espace ordinaire \rightarrow notion de localité.

La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .

La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

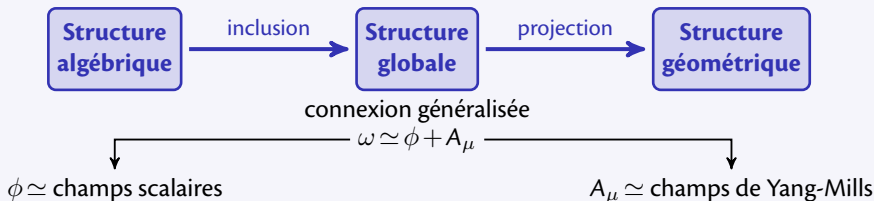
- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .



La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

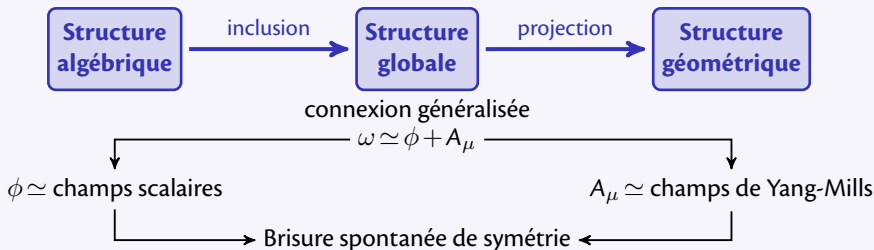
- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .



La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

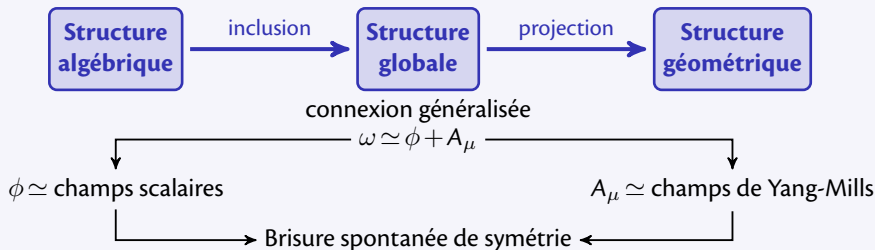
- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .



La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .

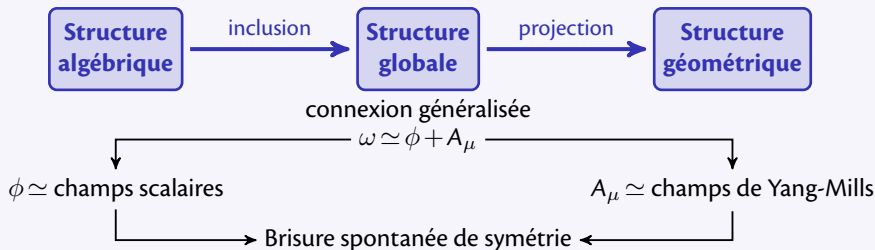


GNC et algébroïdes de Lie transitifs \Rightarrow structure algébrique riche.

La substance des théories de jauge généralisées

Théorie de jauge locale généralisée = mélange de deux structures :

- Espace ordinaire \Rightarrow notion de localité.
- Espace "interne" de nature plus algébrique \Rightarrow champs ϕ .



GNC et algébroïdes de Lie transitifs \Rightarrow structure algébrique riche.

Fibré principal + connexion \Rightarrow structure algébrique insuffisante.

Conclusion

Conclusion

Conclusion

Conclusion

- Principe d'une théorie de jauge locale :
 - Symétrie globale promue en une symétrie locale.
 - Couplage minimal des champs de jauge à des champs de matière.
 - Dynamique pour les champs de jauge.

Conclusion

Conclusion

- Principe d'une théorie de jauge locale :
 - Symétrie globale promue en une symétrie locale.
 - Couplage minimal des champs de jauge à des champs de matière.
 - Dynamique pour les champs de jauge.
- Les mathématiques des théories de jauge s'enrichissent.
 - Géométrie des fibrés et de leurs connexions.
 - Géométrie non commutative.
 - Algébroïdes de Lie transitifs.

→ **Forte interaction entre la physique et les mathématiques.**

Conclusion

Conclusion

- Principe d'une théorie de jauge locale :
 - Symétrie globale promue en une symétrie locale.
 - Couplage minimal des champs de jauge à des champs de matière.
 - Dynamique pour les champs de jauge.
- Les mathématiques des théories de jauge s'enrichissent.
 - Géométrie des fibrés et de leurs connexions.
 - Géométrie non commutative.
 - Algébroïdes de Lie transitifs.

→ **Forte interaction entre la physique et les mathématiques.**
- Toutes ces constructions suivent le même motif :



Quelques idées de lecture

- ▶ Serge Lazzarini et Thierry Masson.
Connections on Lie algebroids and on derivation-based non-commutative geometry.
J. Geom. Phys., 62 :387–402, 2012.
- ▶ Thierry Masson.
Gauge theories in noncommutative geometry.
In *FFP11 Symposium Proceedings*. AIP, 2012.
- ▶ Cédric Fournel, Serge Lazzarini, et Thierry Masson.
Formulation of gauge theories on transitive lie algebroids.
J. Geom. Phys., 64 :174–191, 2013.
- ▶ Cédric Fournel, Jordan François, Serge Lazzarini, et Thierry Masson.
Gauge invariant composite fields out of connections, with examples.
Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 11(1) :1450016, 2014.
- ▶ Jordan François, Serge Lazzarini, et Thierry Masson.
Gauge field theories : various mathematical approaches.
In preparation, 02/2014.

Merci pour votre attention

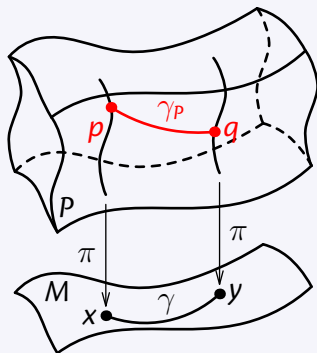
Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_P a des vecteurs tangents tous horizontaux.



Relèvement horizontal et courbure

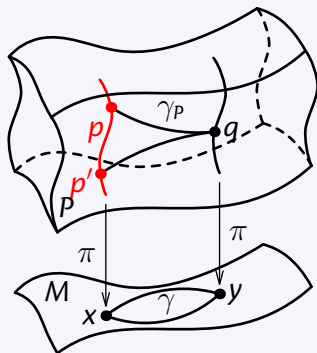
Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_p a des vecteurs tangents tous horizontaux.

⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_p n'est pas nécessairement fermé.

Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.



Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal d'une courbe :

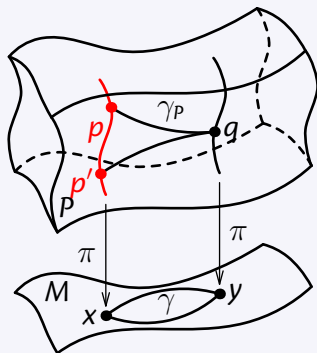
Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_p a des vecteurs tangents tous horizontaux.

⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_p n'est pas nécessairement fermé.

Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.

Version infinitésimale :



Relèvement horizontal et courbure

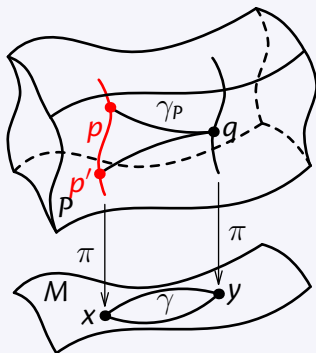
Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_p a des vecteurs tangents tous horizontaux.

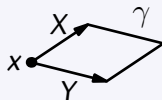
⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_p n'est pas nécessairement fermé.

Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.



Version infinitésimale :

γ est déterminé par deux vecteur X et Y .



Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_p a des vecteurs tangents tous horizontaux.

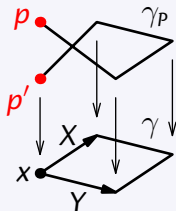
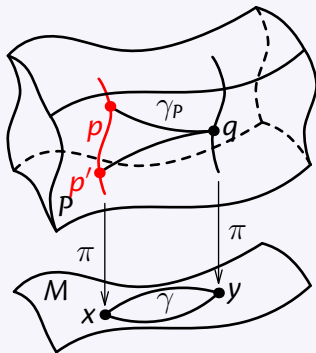
⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_p n'est pas nécessairement fermé.

Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.

Version infinitésimale :

γ est déterminé par deux vecteur X et Y .

Le relevé γ_p ne se ferme pas infinitésimalement.



Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_p a des vecteurs tangents tous horizontaux.

⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_p n'est pas nécessairement fermé.

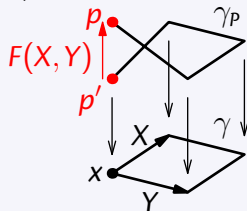
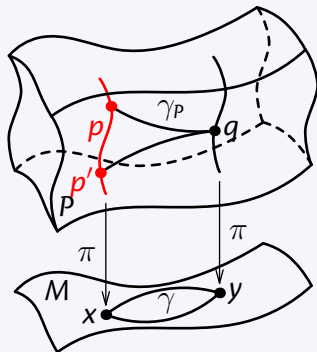
Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.

Version infinitésimale :

γ est déterminé par deux vecteur X et Y .

Le relevé γ_p ne se ferme pas infinitésimalement.

→ la différence est un vecteur vertical mesuré par la courbure de la connexion.



Relèvement horizontal et courbure

Relèvement horizontal d'une courbe :

Une connexion permet de remonter tout chemin dans M en un chemin horizontal dans P .

→ γ_P a des vecteurs tangents tous horizontaux.

⚠ Si γ est un chemin fermé, γ_P n'est pas nécessairement fermé.

Mais p et p' sont (bien sûr) dans la même fibre.

Version infinitésimale :

γ est déterminé par deux vecteur X et Y .

Le relevé γ_P ne se ferme pas infinitésimalement.

→ la différence est un vecteur vertical mesuré par la **courbure de la connexion**.

→ F est l'objet $F_{\mu\nu}$ associé à la connexion A_μ .

