Qu'est-ce que la physique-mathématique ?

À quoi elle sert ?

Thierry Masson

Laboratoire de Physique Théorique
Université Paris XI

Mardi 16 janvier 2007

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

Objectif de cet exposé

Objectif de cet exposé

- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas...

Objectif de cet exposé

- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas...
- Vous faire prendre conscience de la puissance des mathématiques en science expérimentale.

Objectif de cet exposé

- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas. . .
- Vous faire prendre conscience de la puissance des mathématiques en science expérimentale.
- Parcourir quelques résultats de physique-mathématique.

Objectif de cet exposé

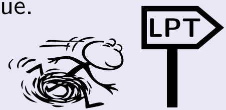
- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas...
- Vous faire prendre conscience de la puissance des mathématiques en science expérimentale.
- Parcourir quelques résultats de physique-mathématique.
- Montrer des recherches actuelles en physique-mathématique.

Objectif de cet exposé

- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas...
- Vous faire prendre conscience de la puissance des mathématiques en science expérimentale.
- Parcourir quelques résultats de physique-mathématique.
- Montrer des recherches actuelles en physique-mathématique.
- Vous donner l'envie irrépressible d'en faire...

Objectif de cet exposé

- Expliquer ce qu'est la physique-mathématique, ce qu'est un physicien-mathématicien, ce qu'il fait et ne fait pas...
- Vous faire prendre conscience de la puissance des mathématiques en science expérimentale.
- Parcourir quelques résultats de physique-mathématique.
- Montrer des recherches actuelles en physique-mathématique.
- Vous donner l'envie irrépressible d'en faire...



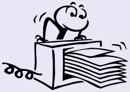
Plan de l'exposé

La diversité de la physique-mathématique

1. **La diversité de la physique-mathématique**
   - Le spectre des approches
   - La physique-mathématique
   - Le mariage difficile. . .
   - Le spectre des mathématiques
   - Exemples de résultats de physique-mathématique
2. **Quelques exemples historiques**
3. **Un développement récent : la géométrie non commutative**

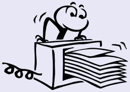
Le spectre des approches

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données 

Le spectre des approches

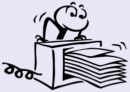
Expérience, collecte de données



Interprétation des données

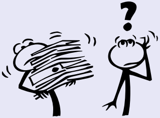
Le spectre des approches

Expérience, collecte de données



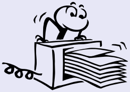
Interprétation des données

Modélisation



Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

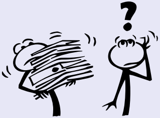


↓

Interprétation des données

↓

Modélisation

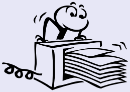


↓

Recherche des conséquences

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

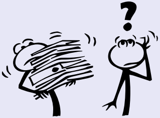


↓

Interprétation des données

↓

Modélisation



↓

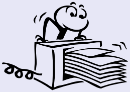
Recherche des conséquences

↓

Tests du modèle

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

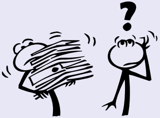


↓

Interprétation des données

↓

Modélisation



↓

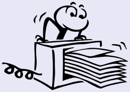
Recherche des conséquences

↓

Tests du modèle

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

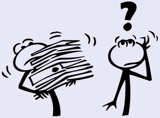


↓

Interprétation des données

↓

Modélisation



↓

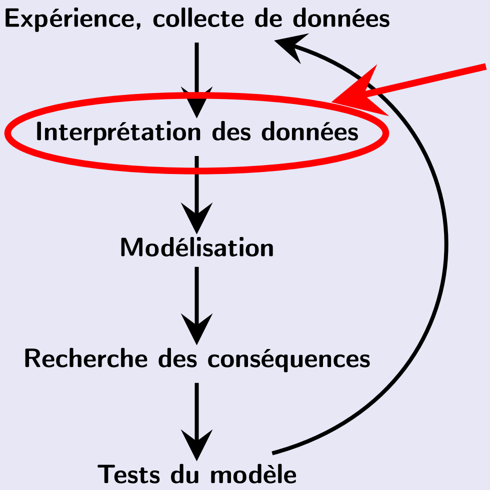
Recherche des conséquences

↓

Tests du modèle

ou

Le spectre des approches



Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

↓

Interprétation des données

↓

Modélisation

↓

Recherche des conséquences

↓

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .
Kepler (Tycho Brahe)

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

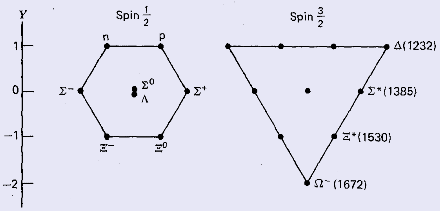
Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)



Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

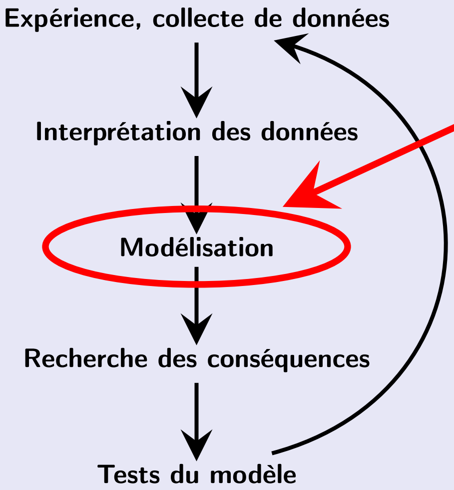
Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques...

Le spectre des approches



Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques. . .
Newton

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques...
Newton, Lagrange, Hamilton

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques. . .
Newton, Lagrange, Hamilton, von Neumann

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici. . .

Classification. . .
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques. . .
Newton, Lagrange, Hamilton, von Neumann

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques...
Newton, Lagrange, Hamilton, von Neumann

Méthodes nouvelles de résolutions d'équations...

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

↓

Interprétation des données

↓

Modélisation

↓

Recherche des conséquences

↓

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques...
Newton, Lagrange, Hamilton, von Neumann

Méthodes nouvelles de résolutions d'équations...
Fourier

Le spectre des approches

Expérience, collecte de données

Interprétation des données

Modélisation

Recherche des conséquences

Tests du modèle

Le physicien-mathématicien intervient ici...

Classification...
Kepler (Tycho Brahe), SU(3)

Création de mathématiques...
Newton, Lagrange, Hamilton, von Neumann

Méthodes nouvelles de résolutions d'équations...
Fourier, Poincaré

La physique-mathématique

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien. . .

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien…

- … utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien...

- ... utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- ... démontre des résultats mathématiques,

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien...

- ... utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- ... démontre des résultats mathématiques,
- ... réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien. . .

- . . . utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- . . . démontre des résultats mathématiques,
- . . . réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,
- . . . crée des cadres mathématiques.

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien...

- ... utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- ... démontre des résultats mathématiques,
- ... réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,
- ... crée des cadres mathématiques.

Le physicien-mathématicien **n'est pas...**

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien...

- ... utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- ... démontre des résultats mathématiques,
- ... réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,
- ... crée des cadres mathématiques.

Le physicien-mathématicien **n'est pas...**

... un physicien : il n'étudie pas un problème concret, il ne regarde pas l'expérience pour elle-même.

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien...

- ... utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- ... démontre des résultats mathématiques,
- ... réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,
- ... crée des cadres mathématiques.

Le physicien-mathématicien **n'est pas...**

... un physicien : il n'étudie pas un problème concret, il ne regarde pas l'expérience pour elle-même.

... un mathématicien : il ne cherche pas nécessairement à classer les objets, il ne cherche pas à généraliser les résultats.

La physique-mathématique

Physique : science qui étudie les propriétés générales de la matière, de l'espace, du temps et établit des lois qui rendent compte des phénomènes naturels.

Mathématique : science qui étudie, par le moyen du raisonnement déductif, les propriétés d'objets abstraits et les relations qui s'établissent entre eux.

Le physicien-mathématicien. . .

- . . . utilise des mathématiques récentes pour résoudre des problèmes,
- . . . démontre des résultats mathématiques,
- . . . réécrit avec des mathématiques nouvelles les lois de la physique,
- . . . crée des cadres mathématiques.

Le physicien-mathématicien **n'est pas. . .**

. . . un physicien : il n'étudie pas un problème concret, il ne regarde pas l'expérience pour elle-même.

. . . un mathématicien : il ne cherche pas nécessairement à classer les objets, il ne cherche pas à généraliser les résultats.

Ces deux assertions sont fausses dans la plupart des cas !

Le mariage difficile. . .

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »
Daniel Bernoulli

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »
Daniel Bernoulli

« Les découvertes en physique ont montré au mathématicien de nouvelles formes de quantités qu'il n'aurait jamais imaginées. »

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »
Daniel Bernoulli

« Les découvertes en physique ont montré au mathématicien de nouvelles formes de quantités qu'il n'aurait jamais imaginées. »
James Clerk Maxwell

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »
Daniel Bernoulli

« Les découvertes en physique ont montré au mathématicien de nouvelles formes de quantités qu'il n'aurait jamais imaginées. »
James Clerk Maxwell

« Notre expérience jusqu'à présent justifie notre croyance que la nature est la réalisation des idées mathématiques les plus simples qu'on puisse concevoir. Je suis convaincu qu'on peut découvrir au moyen de constructions purement mathématiques les concepts et les lois les reliant entre eux, ce qui fournit la clé de la compréhension des phénomènes naturels. . . »

Le mariage difficile. . .

« . . . il serait préférable pour la vraie physique qu'il n'y ait aucun mathématicien sur Terre. »
Daniel Bernoulli

« Les découvertes en physique ont montré au mathématicien de nouvelles formes de quantités qu'il n'aurait jamais imaginées. »
James Clerk Maxwell

« Notre expérience jusqu'à présent justifie notre croyance que la nature est la réalisation des idées mathématiques les plus simples qu'on puisse concevoir. Je suis convaincu qu'on peut découvrir au moyen de constructions purement mathématiques les concepts et les lois les reliant entre eux, ce qui fournit la clé de la compréhension des phénomènes naturels. . . »
Albert Einstein

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »

Freeman Dyson

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »

Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »

Le mariage difficile...

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »
Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »
Paul Adrien Maurice Dirac

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »
Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »
Paul Adrien Maurice Dirac

« Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté l'arithmétique, et, d'un autre, la physique. »

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »
Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »
Paul Adrien Maurice Dirac

« Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté l'arithmétique, et, d'un autre, la physique. »
Alain Connes

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »
Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »
Paul Adrien Maurice Dirac

« Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté l'arithmétique, et, d'un autre, la physique. »
Alain Connes

« En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche. »

Le mariage difficile. . .

« Pour un physicien, les mathématiques ne sont pas juste un outil avec lequel les phénomènes peuvent être calculés, c'est la source principale des concepts et des principes avec lesquels les nouvelles théories peuvent être créées. »
Freeman Dyson

« Je pense qu'il y a une morale à cette histoire, à savoir qu'il est plus important d'avoir de la beauté dans une équation que de constater qu'elle s'ajuste à l'expérience. »
Paul Adrien Maurice Dirac

« Disons qu'en mathématiques, il y a deux sources inépuisables de phénomènes à l'état brut qui sont, d'un côté l'arithmétique, et, d'un autre, la physique. »
Alain Connes

« En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche. »
Les Shadoks

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Le mariage surprenant...

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier...

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier. . .
Durant le dernier siècle, de nombreux domaines des mathématiques ont été sollicités pour décrire les lois de la physique théorique

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier. . .
Durant le dernier siècle, de nombreux domaines des mathématiques ont été sollicités pour décrire les lois de la physique théorique : géométrie riemannienne, opérateurs dans les espaces de Hilbert, distributions, théorie des groupes de Lie, géométrie différentielle. . .

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier. . .
Durant le dernier siècle, de nombreux domaines des mathématiques ont été sollicités pour décrire les lois de la physique théorique : géométrie riemannienne, opérateurs dans les espaces de Hilbert, distributions, théorie des groupes de Lie, géométrie différentielle. . .

La question philosophique qui découle de cette constatation :

Le mariage surprenant. . .

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier. . .
Durant le dernier siècle, de nombreux domaines des mathématiques ont été sollicités pour décrire les lois de la physique théorique : géométrie riemannienne, opérateurs dans les espaces de Hilbert, distributions, théorie des groupes de Lie, géométrie différentielle. . .

La question philosophique qui découle de cette constatation :
les mathématiques existent-elles en dehors de la réalité expérimentale ?

Le mariage surprenant...

Que se cache-t-il derrière ces prises de position ?

1. La Nature obéit à des lois.
2. Les lois de la Nature sont exprimables mathématiquement.
3. La Nature semble avoir une préférence pour l'élégance mathématique.

Bien sûr cette remarque ne date pas d'hier...
Durant le dernier siècle, de nombreux domaines des mathématiques ont été sollicités pour décrire les lois de la physique théorique : géométrie riemannienne, opérateurs dans les espaces de Hilbert, distributions, théorie des groupes de Lie, géométrie différentielle...

La question philosophique qui découle de cette constatation :
les mathématiques existent-elles en dehors de la réalité expérimentale ?
Je ne chercherai pas à répondre !

Le spectre des mathématiques

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre
pour faire de la physique-mathématique ?

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif :

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie, la K-théorie

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie, la K-théorie, le chaos

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie, la K-théorie, le chaos, la théorie de l'index

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie, la K-théorie, le chaos, la théorie de l'index, ...

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l’analyse réelle, l’analyse complexe, l’algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l’arithmétique, la logique, l’analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l’homologie, la K-théorie, le chaos, la théorie de l’index, ...

Dans les faits : une bonne et large culture suffit !

Le spectre des mathématiques

La question usuelle des étudiants :

Quelles mathématiques je dois apprendre pour faire de la physique-mathématique ?

Ma réponse :

Toutes !

Extrait non exhaustif : l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'algèbre linéaire, la topologie, la théorie de la mesure, la théorie des groupes, les distributions, la géométrie différentielle, l'arithmétique, la logique, l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs, la géométrie algébrique, l'homologie, la K-théorie, le chaos, la théorie de l'index, ...

Dans les faits : une bonne et large culture suffit !
Et une curiosité sans borne...

Exemples de résultats de physique-mathématique

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➙ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques. . .

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➜ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques…

Théorème de Wigner : les particules élémentaires sont classées par les représentations irréductibles du groupe de Poincaré.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➡ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques...

Théorème de Wigner : les particules élémentaires sont classées par les représentations irréductibles du groupe de Poincaré.
➡ masse, spin.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➙ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques. . .

Théorème de Wigner : les particules élémentaires sont classées par les représentations irréductibles du groupe de Poincaré.
➙ masse, spin.

Théorème spin-statistique : La statistique des particules est reliée à leur spin.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➡ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques. . .

Théorème de Wigner : les particules élémentaires sont classées par les représentations irréductibles du groupe de Poincaré.
➡ masse, spin.

Théorème spin-statistique : La statistique des particules est reliée à leur spin.
statistique de Bose-Einstein $\longleftrightarrow$ spin entier,
statistique de Fermi-Dirac $\longleftrightarrow$ spin demi-entier.

Exemples de résultats de physique-mathématique

Théorème de classification des cristaux : les cristaux sont classés par la théorie des groupes en 32 classes distinctes.

Théorème de Nœther : une symétrie donne lieu à une quantité conservée.
➙ conservation de l'énergie, des impulsions, des moments cinétiques. . .

Théorème de Wigner : les particules élémentaires sont classées par les représentations irréductibles du groupe de Poincaré.
➙ masse, spin.

Théorème spin-statistique : La statistique des particules est reliée à leur spin.
statistique de Bose-Einstein $\longleftrightarrow$ spin entier,
statistique de Fermi-Dirac $\longleftrightarrow$ spin demi-entier.

Théorème CPT : les lois de la nature sont invariantes sous la combinaison « CPT » des trois symétries :
C, conjugaison de charge,
P, transformation de parité,
T, inversion du sens du temps.

Quelques exemples historiques

1. La diversité de la physique-mathématique
2. **Quelques exemples historiques**
   - La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein
   - La mécanique quantique
   - L'électromagnétisme
3. Un développement récent : la géométrie non commutative

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel : l'espace-temps de Minkowski.

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel : l'espace-temps de Minkowski.
- La gravitation d'Einstein va plus loin

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel : l'espace-temps de Minkowski.
- La gravitation d'Einstein va plus loin : l'espace-temps n'est plus $\mathbb{R}^4$, mais un objet « courbé ».

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel : l'espace-temps de Minkowski.
- La gravitation d'Einstein va plus loin : l'espace-temps n'est plus $\mathbb{R}^4$, mais un objet « courbé ».
  C'est la distribution de matière et d'énergie qui cause cette courbure.

La relativité restreinte et la gravitation d'Einstein

- Jusqu'à la relativité restreinte, le temps et l'espace étaient deux entités séparées.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La relativité restreinte d'Einstein s'interprète plus naturellement dans un espace quadri-dimensionnel : l'espace-temps de Minkowski.
- La gravitation d'Einstein va plus loin : l'espace-temps n'est plus $\mathbb{R}^4$, mais un objet « courbé ».
  C'est la distribution de matière et d'énergie qui cause cette courbure.
- Cadre de cette théorie : géométrie différentielle (pseudo-)riemmanienne.

La mécanique quantique

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert, et les quantités mesurables par un opérateur (hermitien) sur cet espace de Hilbert.

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert, et les quantités mesurables par un opérateur (hermitien) sur cet espace de Hilbert.
- Les conséquences sont énormes :

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert, et les quantités mesurables par un opérateur (hermitien) sur cet espace de Hilbert.
- Les conséquences sont énormes :
  - Relations d'incertitude de Heisenberg dûes à la non commutativité de certains opérateurs ($AB \neq BA$).

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert, et les quantités mesurables par un opérateur (hermitien) sur cet espace de Hilbert.
- Les conséquences sont énormes :
  - Relations d'incertitude de Heisenberg dûes à la non commutativité de certains opérateurs ($AB \neq BA$).
  - Interprétation probabiliste des expériences et des données numériques.

La mécanique quantique

- Jusqu'à la mécanique quantique, la description d'un objet physique était réalisée par la donnée des positions de chacun de ses constituants dans l'espace (de dimension 3) à un instant donné.
  C'est le cadre qui avait été proposé par Newton.
- La mécanique quantique décrit un objet physique par un état, qui est un vecteur dans un espace de Hilbert, et les quantités mesurables par un opérateur (hermitien) sur cet espace de Hilbert.
- Les conséquences sont énormes :
  - Relations d'incertitude de Heisenberg dûes à la non commutativité de certains opérateurs ($AB \neq BA$).
  - Interprétation probabiliste des expériences et des données numériques.
  - Incompréhension profonde de cette théorie ! 

L'électromagnétisme

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \qquad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \qquad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Écriture relativiste

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

L'électromagnétisme

Équations originales

Écriture relativiste

Géo-diff

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad A_\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

L'électromagnétisme

Équations originales | Écriture relativiste | Géo-diff

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \qquad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad j = j_\mu dx^\mu \qquad A = A_\mu dx^\mu$$

L'électromagnétisme

Équations originales

Écriture relativiste

Géo-diff

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1\dots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

L'électromagnétisme

Équations originales | Écriture relativiste | Géo-diff

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!}\partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

L'électromagnétisme

Équations originales | Écriture relativiste | Géo-diff

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!}\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!}\partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$d^2 = 0$$

L'électromagnétisme

Équations originales | Écriture relativiste | Géo-diff

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$$

$$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$$

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!} \partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$d^2 = 0 \qquad * \omega = \tfrac{1}{r!(n-r)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \omega^{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}$$

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \chi$ $\phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!} \partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$d^2 = 0 \qquad * \omega = \tfrac{1}{r!(n-r)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \omega^{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}$$

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$, $\phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!} \partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$d^2 = 0 \qquad * \omega = \tfrac{1}{r!(n-r)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \omega^{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}$$

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\mathrm{div}\, \vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d{*}F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \chi \quad \phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	$A \to A + d\chi$

$$F = \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad j = j_\mu dx^\mu \quad A = A_\mu dx^\mu$$

$$\omega = \tfrac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \qquad d\omega = \tfrac{1}{r!} \partial_\xi \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^\xi \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$$

$$d^2 = 0 \qquad * \omega = \tfrac{1}{r!(n-r)!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \omega^{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_{r+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\operatorname{div}\vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\chi$, $\phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	$A \to A + d\chi$

Cette écriture permet des généralisations :

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\operatorname{div}\vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\chi$, $\phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	$A \to A + d\chi$

Cette écriture permet des généralisations :

- Théories de jauge non abéliennes (Yang-Mills).

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\chi$ $\phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	$A \to A + d\chi$

Cette écriture permet des généralisations :

- Théories de jauge non abéliennes (Yang-Mills). La forme A s'interprète comme une connexion dans un fibré vectoriel, et F comme sa courbure.

L'électromagnétisme

Équations originales	Écriture relativiste	Géo-diff
$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = 0$	$\partial_\xi F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\xi} + \partial_\nu F_{\xi\mu} = 0$	$dF = 0$
$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = -\vec{j}$	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$	$*d*F = j$
$\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{A} \quad \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$F = dA$
$\vec{A} \to \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \chi$, $\quad \phi \to \phi + \dfrac{\partial \chi}{\partial t}$	$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$	$A \to A + d\chi$

Cette écriture permet des généralisations :

- Théories de jauge non abéliennes (Yang-Mills). La forme A s'interprète comme une connexion dans un fibré vectoriel, et F comme sa courbure.
- Géométrie non commutative.

Un développement récent : la géométrie non commutative

Motivations physiques

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.**

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle.

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.**

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème…
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux…

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux...
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux...
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

- l'espace-temps n'a pas de structure mathématique claire à « l'échelle de la mécanique quantique »,

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux...
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

- l'espace-temps n'a pas de structure mathématique claire à « l'échelle de la mécanique quantique »,
- la théorie quantique des champs pose certains problèmes dans ses méthodes de calcul,

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux...
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

- l'espace-temps n'a pas de structure mathématique claire à « l'échelle de la mécanique quantique »,
- la théorie quantique des champs pose certains problèmes dans ses méthodes de calcul,
- il est impossible de concilier deux théories écrites dans des langues différentes !

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème. . .
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux. . .
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

- l'espace-temps n'a pas de structure mathématique claire à « l'échelle de la mécanique quantique »,
- la théorie quantique des champs pose certains problèmes dans ses méthodes de calcul,
- il est impossible de concilier deux théories écrites dans des langues différentes !

L'idée de la géométrie non commutative

Motivations physiques

La physique théorique actuelle est confrontée à un énorme problème...
Deux théories qui refusent de fusionner !

1. **La relativité générale.** Théorie qui utilise des objets de géométrie différentielle. (Les 3 forces microscopiques sont des théories de jauge.)
2. **La mécanique quantique.** Théorie qui utilise des structures algébriques non commutatives.

Il existe des idées naïves pour reconcilier les deux...
Il existe des raisons profondes pour refonder ces deux théories sur d'autres bases mathématiques :

- l'espace-temps n'a pas de structure mathématique claire à « l'échelle de la mécanique quantique »,
- la théorie quantique des champs pose certains problèmes dans ses méthodes de calcul,
- il est impossible de concilier deux théories écrites dans des langues différentes !

L'idée de la géométrie non commutative : créer un cadre mathématique qui englobe la géométrie différentielle ordinaire et les structures algébriques.

Motivations mathématiques

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.
- Compatibilité entre la norme et l'involution : $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.
- Compatibilité entre la norme et l'involution : $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

$C(X)$, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est une C^*-algèbre commutative.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.
- Compatibilité entre la norme et l'involution : $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

$C(X)$, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est une C^*-algèbre commutative.

Théorème (Gel'fand-Naïmark)

Toutes les C^*-algèbres commutatives sont de la forme $C(X)$.

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.
- Compatibilité entre la norme et l'involution : $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

$C(X)$, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est une C^*-algèbre commutative.

Théorème (Gel'fand-Naïmark)

Toutes les C^*-algèbres commutatives sont de la forme $C(X)$.

Les espaces topologiques forment un sous-ensemble d'espaces plus généraux « non commutatifs ».

Motivations mathématiques

X espace topologique compact.

Théorème

La topologie de X détermine et est complètement déterminée par l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs complexes).

Définition

A est une C^*-algèbre si :

- A algèbre munie d'une norme $a \mapsto \|a\|$ qui en fait un espace vectoriel complet.
- A munie d'une involution $a \mapsto a^*$ telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ et $(ab)^* = b^* a^*$.
- Compatibilité entre la norme et l'involution : $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

$C(X)$, avec la norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$, est une C^*-algèbre commutative.

Théorème (Gel'fand-Naïmark)

Toutes les C^*-algèbres commutatives sont de la forme $C(X)$.

Les espaces topologiques forment un sous-ensemble d'espaces plus généraux « non commutatifs ». Il existe un théorème équivalent pour les espaces mesurables.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$
Exemple pour l'espace des phases à 2 dimensions (q, p) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$
Exemple pour l'espace des phases à 2 dimensions (q, p) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Une observable physique est une fonction f sur cet espace des phases.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$
Exemple pour l'espace des phases à 2 dimensions (q, p) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Une observable physique est une fonction f sur cet espace des phases.
Son évolution dans le temps est gouvernée par l'équation de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

où H est la fonction Hamiltonienne du système.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$
Exemple pour l'espace des phases à 2 dimensions (q, p) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Une observable physique est une fonction f sur cet espace des phases.
Son évolution dans le temps est gouvernée par l'équation de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

où H est la fonction Hamiltonienne du système.
Remarque de Dirac : en mécanique quantique l'évolution d'une observable A est donnée par l'équation de Heisenberg

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

où H est l'opérateur Hamiltonien du système.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Mécanique classique : on utilise l'algèbre des fonctions C^∞ sur l'espace des phases.
On munit cette algèbre d'une structure de Poisson : $f, g \mapsto \{f, g\}$
Exemple pour l'espace des phases à 2 dimensions (q, p) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Une observable physique est une fonction f sur cet espace des phases.
Son évolution dans le temps est gouvernée par l'équation de Poisson

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

où H est la fonction Hamiltonienne du système.
Remarque de Dirac : en mécanique quantique l'évolution d'une observable A est donnée par l'équation de Heisenberg

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

où H est l'opérateur Hamiltonien du système. Ces relations sont très semblables !

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

En général $f, g \mapsto \{f, g\}$ vient d'une **structure symplectique**.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

En général $f, g \mapsto \{f, g\}$ vient d'une **structure symplectique**.

Définition

L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre associative, munie d'une involution et d'une unité, engendrée par les 2 éléments hermitiens q et p et la relation $[q, p] = i\hbar\mathbb{1}$.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

En général $f, g \mapsto \{f, g\}$ vient d'une **structure symplectique**.

Définition

L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre associative, munie d'une involution et d'une unité, engendrée par les 2 éléments hermitiens q et p et la relation $[q, p] = i\hbar\mathbb{1}$.

Cette algèbre est en quelque sorte une version non commutative de l'espace des phases à 2 dimensions.

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

En général $f, g \mapsto \{f, g\}$ vient d'une **structure symplectique**.

Définition

L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre associative, munie d'une involution et d'une unité, engendrée par les 2 éléments hermitiens q et p et la relation $[q, p] = i\hbar\mathbb{1}$.

Cette algèbre est en quelque sorte une version non commutative de l'espace des phases à 2 dimensions.

Théorème

Il existe sur l'algèbre de Heisenberg une structure symplectique telle que la structure de Poisson associée soit

$$a, b \mapsto \frac{i}{\hbar}[a, b]$$

Illustration I : l'algèbre de Heisenberg

Quel est le lien entre $\dfrac{df}{dt} = \{H, f\}$ et $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{i}{\hbar}[H, A]$?

En général $f, g \mapsto \{f, g\}$ vient d'une **structure symplectique**.

Définition

L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre associative, munie d'une involution et d'une unité, engendrée par les 2 éléments hermitiens q et p et la relation $[q, p] = i\hbar\mathbb{1}$.

Cette algèbre est en quelque sorte une version non commutative de l'espace des phases à 2 dimensions.

Théorème

Il existe sur l'algèbre de Heisenberg une structure symplectique telle que la structure de Poisson associée soit

$$a, b \mapsto \frac{i}{\hbar}[a, b]$$

Donc l'intuition de Dirac est confirmée : les équations d'évolution des observables en mécanique classique et en mécanique quantique ont la même origine mathématique.

Illustration II : le tore non commutatif

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.

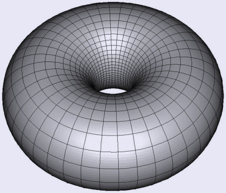
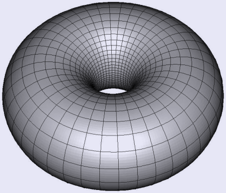


Illustration II : le tore non commutatif

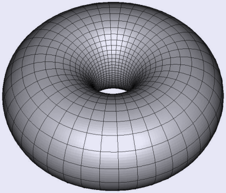
Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



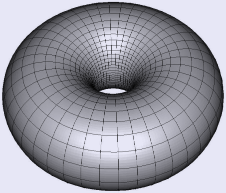
$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2}$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



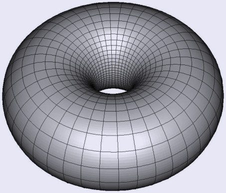
$C^\infty(\mathbb{T}^2) =$ fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2) =$ fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

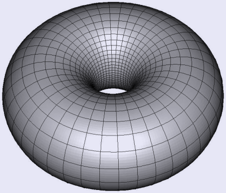
$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

Version non commutative $\mathcal{A}_\theta$: les U_k deviennent des objets non commutatifs.

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

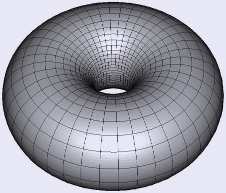
$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

Version non commutative $\mathcal{A}_\theta$: les U_k deviennent des objets non commutatifs.
$\lambda \in \mathbb{S}^1$, $\lambda = e^{i2\pi\theta}$.

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

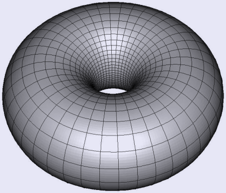
$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

Version non commutative $\mathcal{A}_\theta$: les U_k deviennent des objets non commutatifs.
$\lambda \in \mathbb{S}^1$, $\lambda = e^{i2\pi\theta}$.

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \qquad U_k^* = U_k^{-1}$$

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

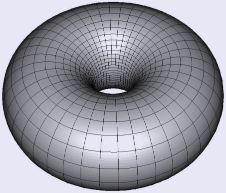
Version non commutative $\mathcal{A}_\theta$: les U_k deviennent des objets non commutatifs.
$\lambda \in \mathbb{S}^1$, $\lambda = e^{i2\pi\theta}$.

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \qquad U_k^* = U_k^{-1}$$

$$\mathcal{A}_\theta \ni a = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

Illustration II : le tore non commutatif

Le tore ordinaire $\mathbb{T}^2$ admet une version non commutative.



$C^\infty(\mathbb{T}^2)$ = fonctions C^∞ de deux variables, périodiques.
Série de Fourier :

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} e^{i2\pi m\alpha_1} e^{i2\pi n\alpha_2} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

$(|m|^\ell + |n|^\ell)|a_{m,n}|$ bornée pour tout $\ell > 0$, $U_k = e^{i2\pi\alpha_k}$.

Version non commutative $\mathcal{A}_\theta$: les U_k deviennent des objets non commutatifs.
$\lambda \in \mathbb{S}^1$, $\lambda = e^{i2\pi\theta}$.

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \qquad U_k^* = U_k^{-1}$$

$$\mathcal{A}_\theta \ni a = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} U_1^m U_2^n$$

Pour $\theta \in \mathbb{Z}$, on retrouve $C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

«Ce que j'aime bien dans ce travail de savant-philosophe, c'est que je n'ai pas besoin de me salir les mains.»

Fin