Quelles mathématiques pour l'effet Hall quantique ?

Thierry Masson

Laboratoire de Physique Théorique
Université Paris XI

LPT-Orsay, Jeudi 18 Novembre 2004

Objectif de cet exposé

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème.

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème. Travaux inspirés de Thouless *et al.* (PRL 49 (1982) 405), Niu et Thouless (J. Phys. A 17 (1984) 2453), Kohmoto (Ann. Phys. 160 (1985) 343), Avron et Seiler (PRL 54 (1985) 259), Niu *et al.* (PRB 31 (1985) 3372).

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème. Travaux inspirés de Thouless *et al.* (PRL 49 (1982) 405), Niu et Thouless (J. Phys. A 17 (1984) 2453), Kohmoto (Ann. Phys. 160 (1985) 343), Avron et Seiler (PRL 54 (1985) 259), Niu *et al.* (PRB 31 (1985) 3372).
- Rappels de travaux antérieurs sur les diagrammes de visibilité, et sur le diagramme de phase.

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème. Travaux inspirés de Thouless *et al.* (PRL 49 (1982) 405), Niu et Thouless (J. Phys. A 17 (1984) 2453), Kohmoto (Ann. Phys. 160 (1985) 343), Avron et Seiler (PRL 54 (1985) 259), Niu *et al.* (PRB 31 (1985) 3372).
- Rappels de travaux antérieurs sur les diagrammes de visibilité, et sur le diagramme de phase. Certains de ces résultats semblent pointer des choses très intéressantes.

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème. Travaux inspirés de Thouless *et al.* (PRL 49 (1982) 405), Niu et Thouless (J. Phys. A 17 (1984) 2453), Kohmoto (Ann. Phys. 160 (1985) 343), Avron et Seiler (PRL 54 (1985) 259), Niu *et al.* (PRB 31 (1985) 3372).
- Rappels de travaux antérieurs sur les diagrammes de visibilité, et sur le diagramme de phase. Certains de ces résultats semblent pointer des choses très intéressantes.
- On verra à la fin qu'il semble émerger une image commune à tout cela, qui pourrait s'inclure dans une approche utilisant d'autres outils mathématiques.

Objectif de cet exposé

- Présenter un ensemble de résultats autour de l'effet Hall quantique obtenus en collaboration avec Y. Georgelin, J.C. Wallet, F. Chandelier.
- Le plus gros de l'exposé concerne des travaux récents basés sur la mécanique quantique du problème. Travaux inspirés de Thouless *et al.* (PRL 49 (1982) 405), Niu et Thouless (J. Phys. A 17 (1984) 2453), Kohmoto (Ann. Phys. 160 (1985) 343), Avron et Seiler (PRL 54 (1985) 259), Niu *et al.* (PRB 31 (1985) 3372).
- Rappels de travaux antérieurs sur les diagrammes de visibilité, et sur le diagramme de phase. Certains de ces résultats semblent pointer des choses très intéressantes.
- On verra à la fin qu'il semble émerger une image commune à tout cela, qui pourrait s'inclure dans une approche utilisant d'autres outils mathématiques.
- Cet exposé ne sera pas un résumé de la journée du 13 novembre à l'IHP !

Plan de l'exposé

L'effet Hall Quantique

Les diagrammes de visibilité

Le diagramme des phases

La mécanique quantique du problème

L'effet Hall Quantique

L'effet Hall Quantique
- L'expérience
- Les résultats expérimentaux
- Les approches théoriques

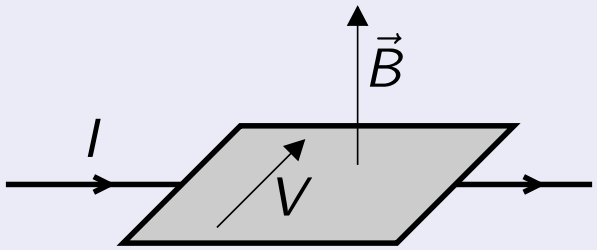
Les diagrammes de visibilité

Le diagramme des phases

La mécanique quantique du problème

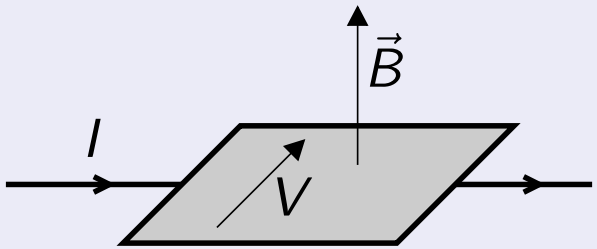
L'expérience

Schéma de l'expérience :



L'expérience

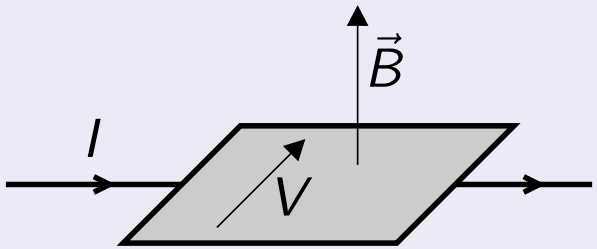
Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,

L'expérience

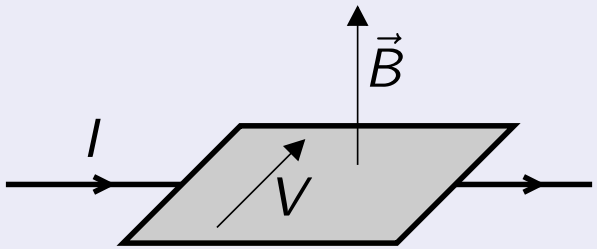
Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,
$I/V = \sigma_H$, conductivité transverse.

L'expérience

Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,
$I/V = \sigma_H$, conductivité transverse.

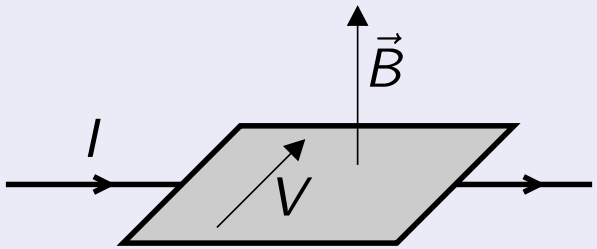
1. Cas classique (Hall, fin XIXème) : température ambiante, matériaux métallique.

$$\sigma_H = \frac{nec}{B} \qquad \rho_H = \frac{B}{nec}$$

ρ_H est donc linéaire en B.

L'expérience

Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,
$I/V = \sigma_H$, conductivité transverse.

1. Cas classique (Hall, fin XIXème) : température ambiante, matériaux métallique.

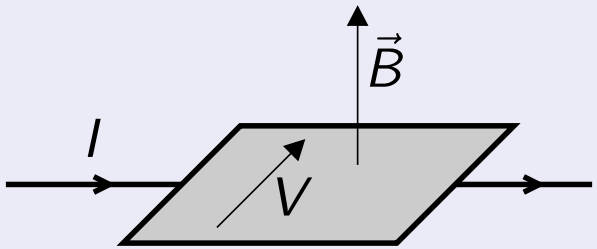
$$\sigma_H = \frac{nec}{B} \qquad \rho_H = \frac{B}{nec}$$

   ρ_H est donc linéaire en B.

2. Cas quantique (1980) : température proche du zéro absolu, semi-conducteurs. Les courbes de ρ_H en fonction de B ne sont plus linéaires. Le comportement de ρ_L est curieux aussi.

L'expérience

Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,
$I/V = \sigma_H$, conductivité transverse.

1. Cas classique (Hall, fin XIXème) : température ambiante, matériaux métallique.

$$\sigma_H = \frac{nec}{B} \qquad \rho_H = \frac{B}{nec}$$

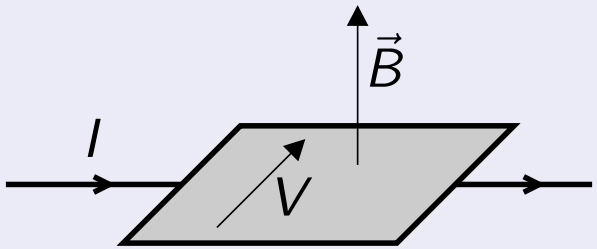
   ρ_H est donc linéaire en B.

2. Cas quantique (1980) : température proche du zéro absolu, semi-conducteurs. Les courbes de ρ_H en fonction de B ne sont plus linéaires. Le comportement de ρ_L est curieux aussi.

Importance de deux paramètres : B, le champs magnétique, N_c le nombre de porteurs de charges.

L'expérience

Schéma de l'expérience :



On s'intéresse aux rapports : $V/I = \rho_H$, résistivité transverse,
$I/V = \sigma_H$, conductivité transverse.

1. Cas classique (Hall, fin XIXème) : température ambiante, matériaux métallique.

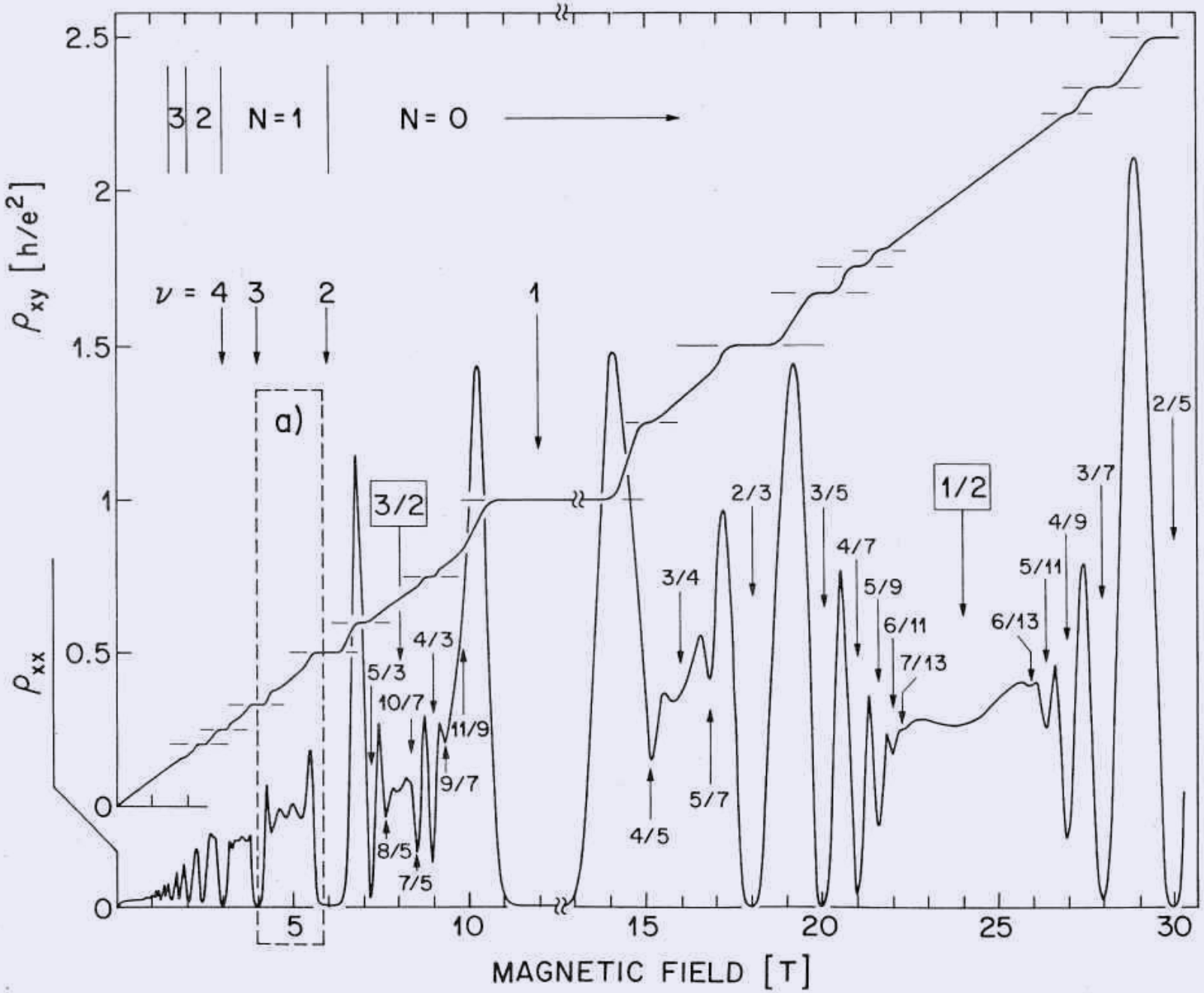
$$\sigma_H = \frac{nec}{B} \qquad \rho_H = \frac{B}{nec}$$

   ρ_H est donc linéaire en B.

2. Cas quantique (1980) : température proche du zéro absolu, semi-conducteurs. Les courbes de ρ_H en fonction de B ne sont plus linéaires. Le comportement de ρ_L est curieux aussi.

Importance de deux paramètres : B, le champs magnétique, N_c le nombre de porteurs de charges. Tous les deux contrôlables expérimentalement.

Résultats typiques d'une expérience de l'effet Hall quantique.



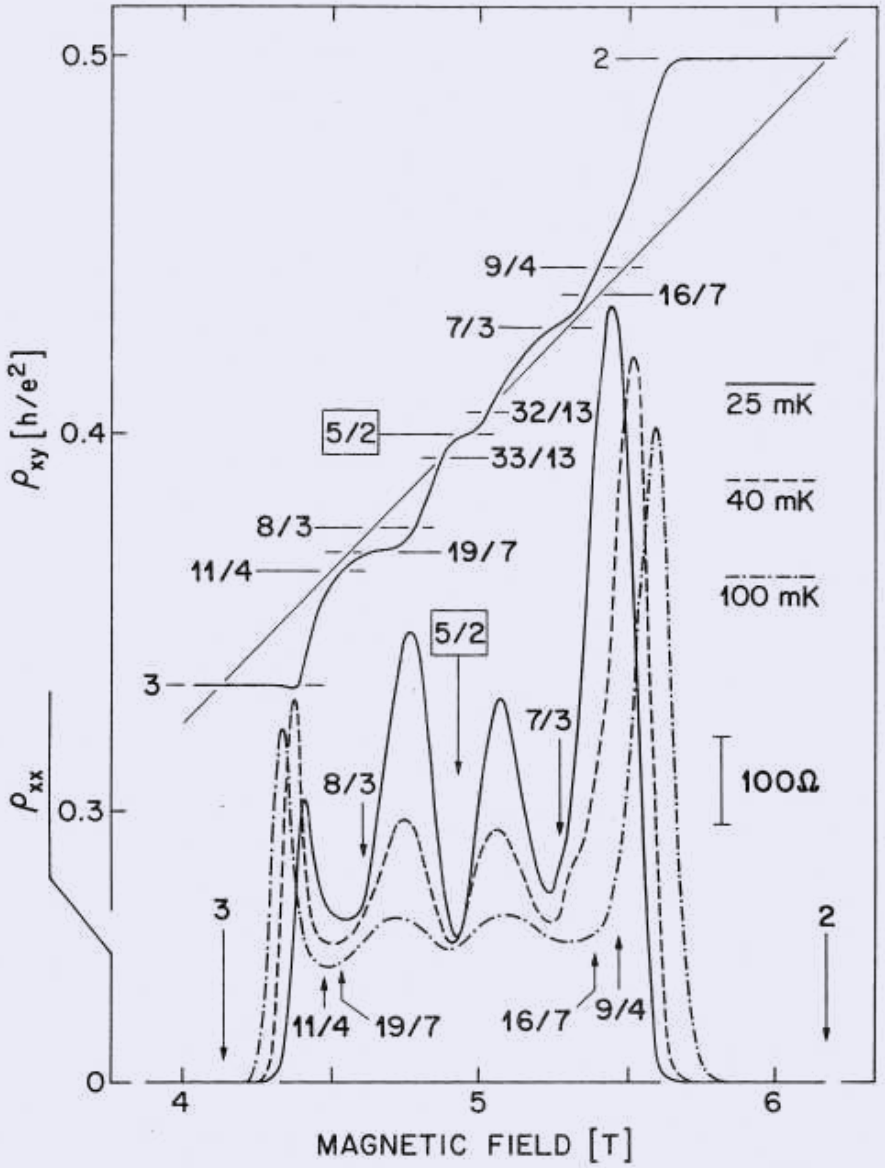
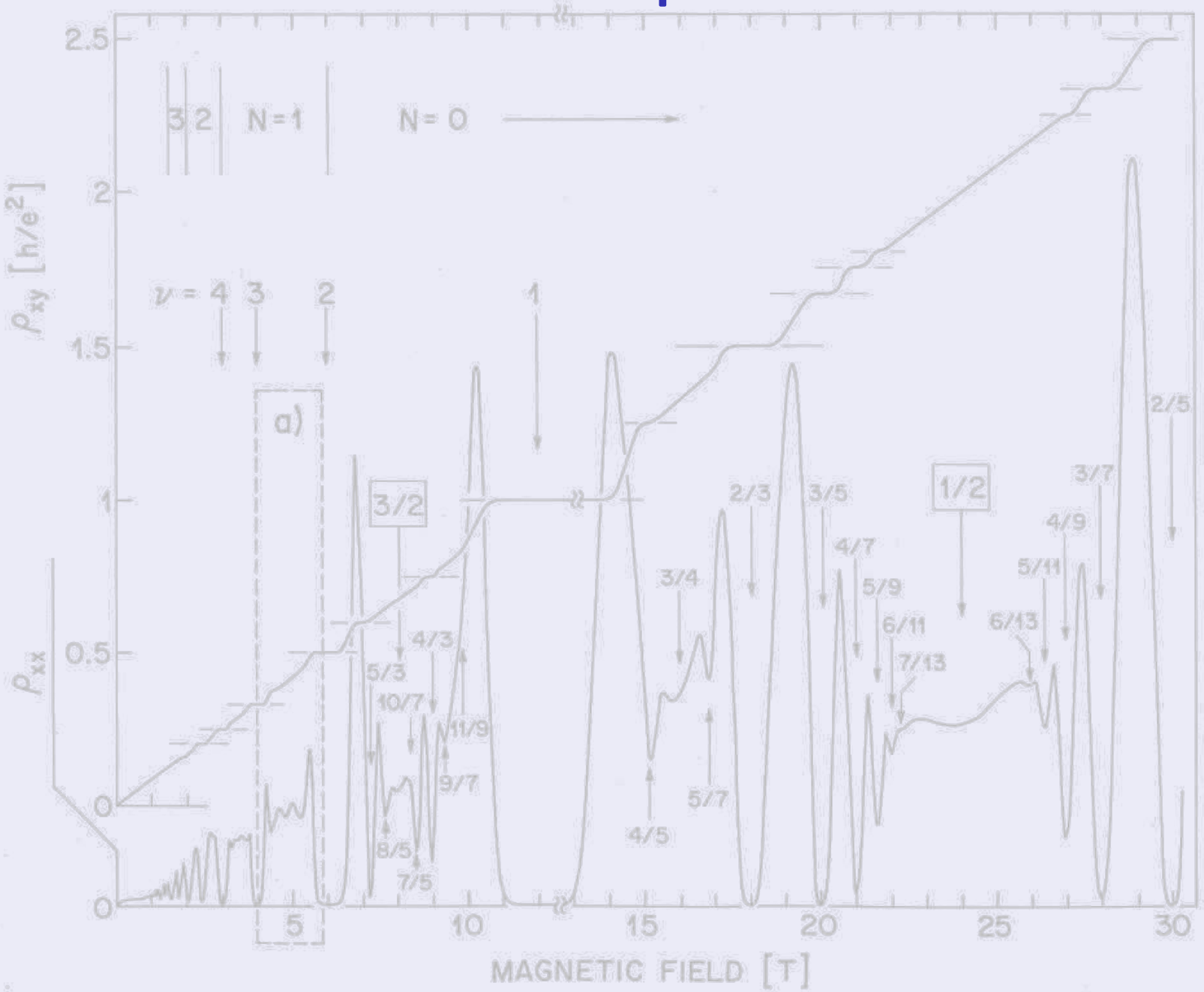


FIG. 2. Diagonal resistivity ρ_{xx} and Hall resistance ρ_{xy} [enlarged section (*a*) of Fig. 1] at $T = 100$ to 25 mK. Filling factors ν are indicated in ρ_{xx} while quantum numbers p/q are shown in ρ_{xy}.

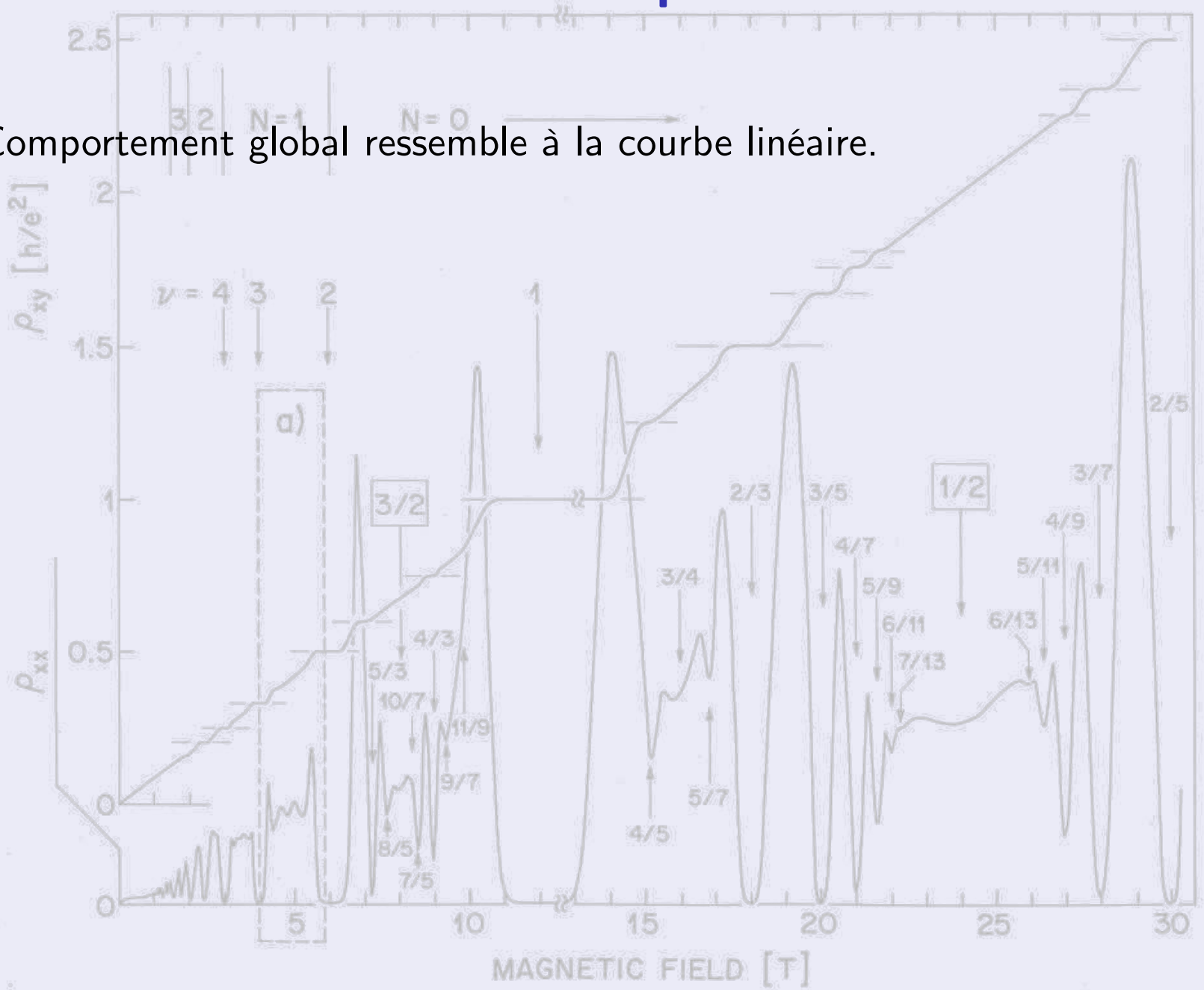
Détails de la courbe précédente.

Les résultats expérimentaux



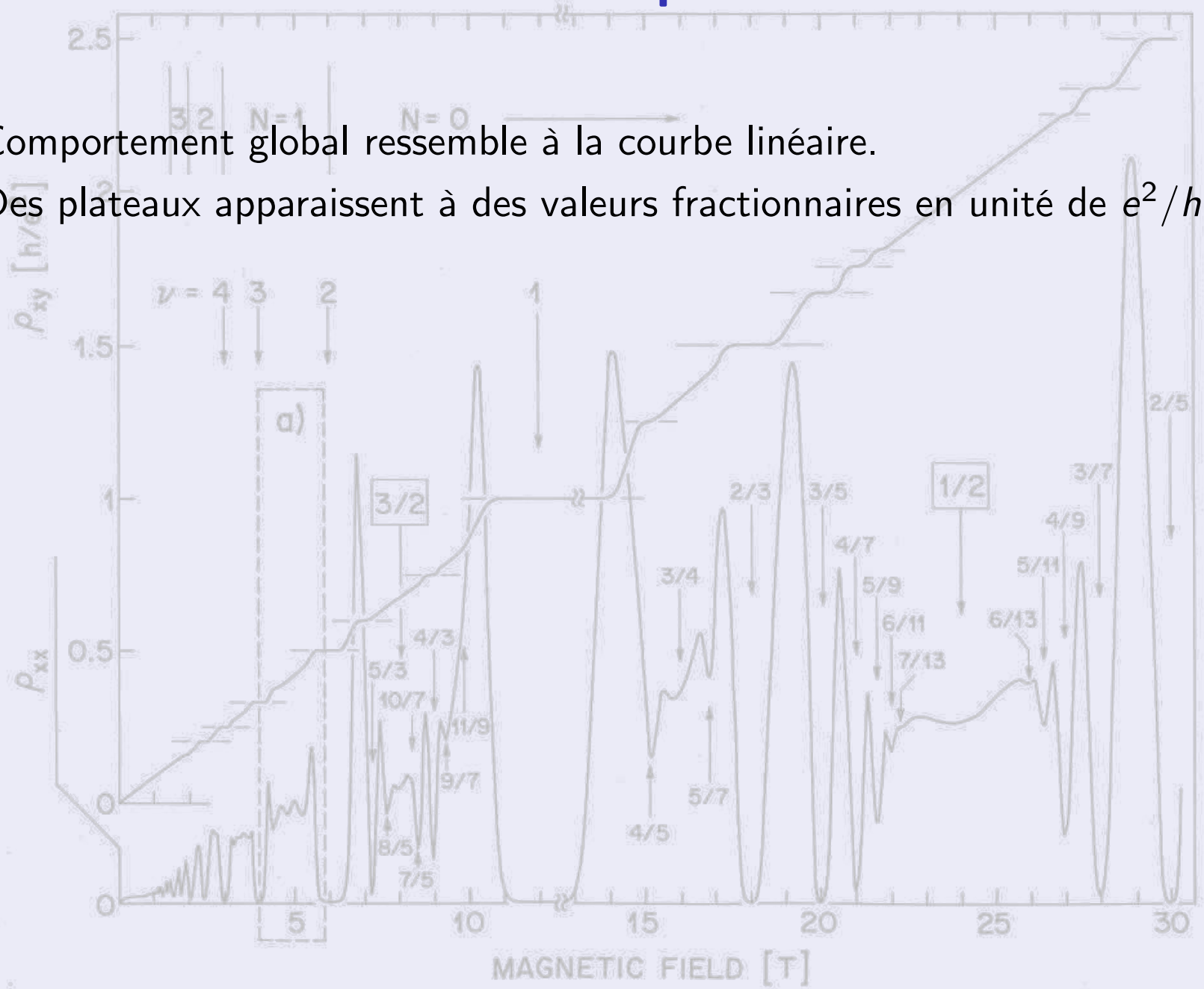
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.



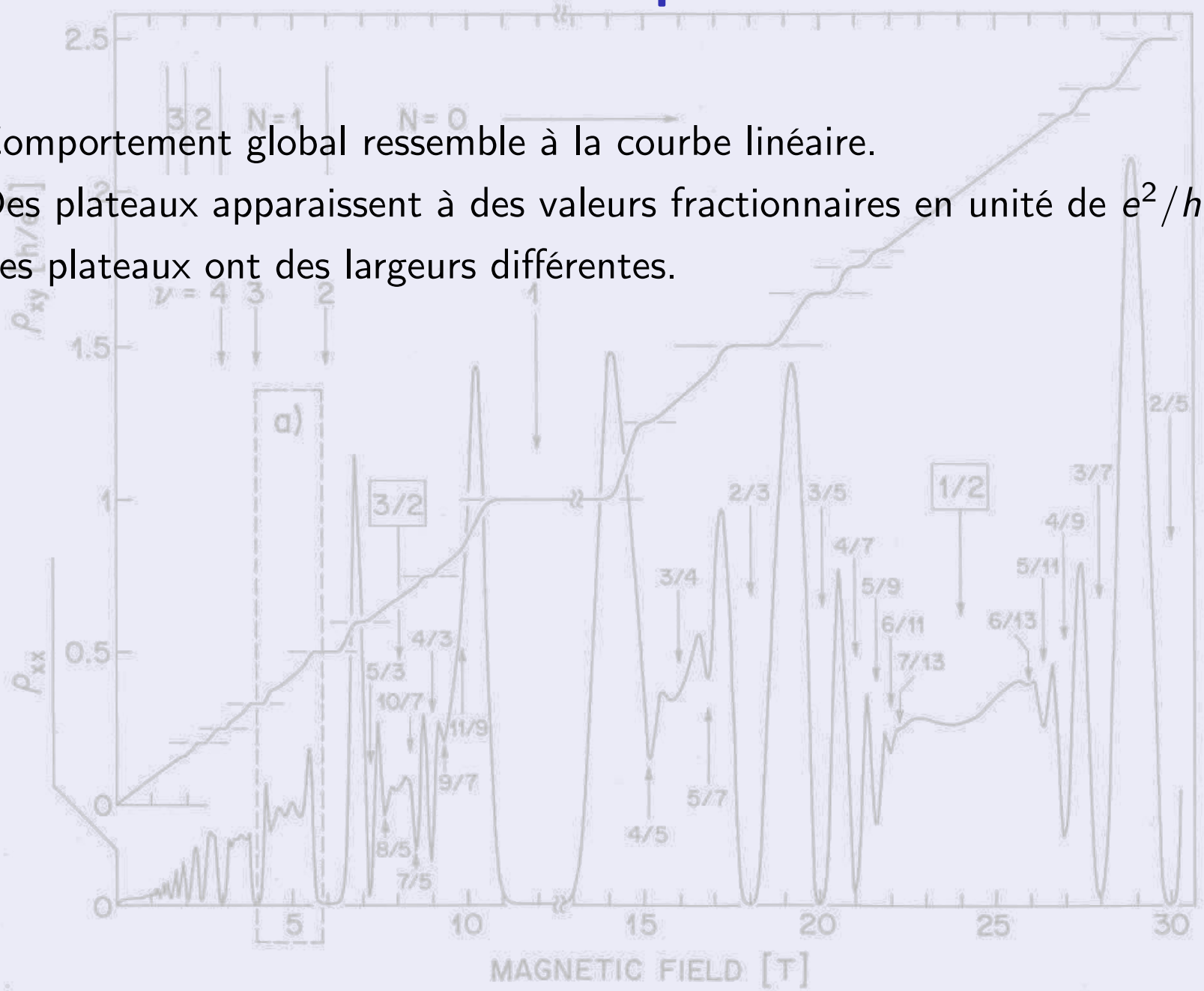
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.



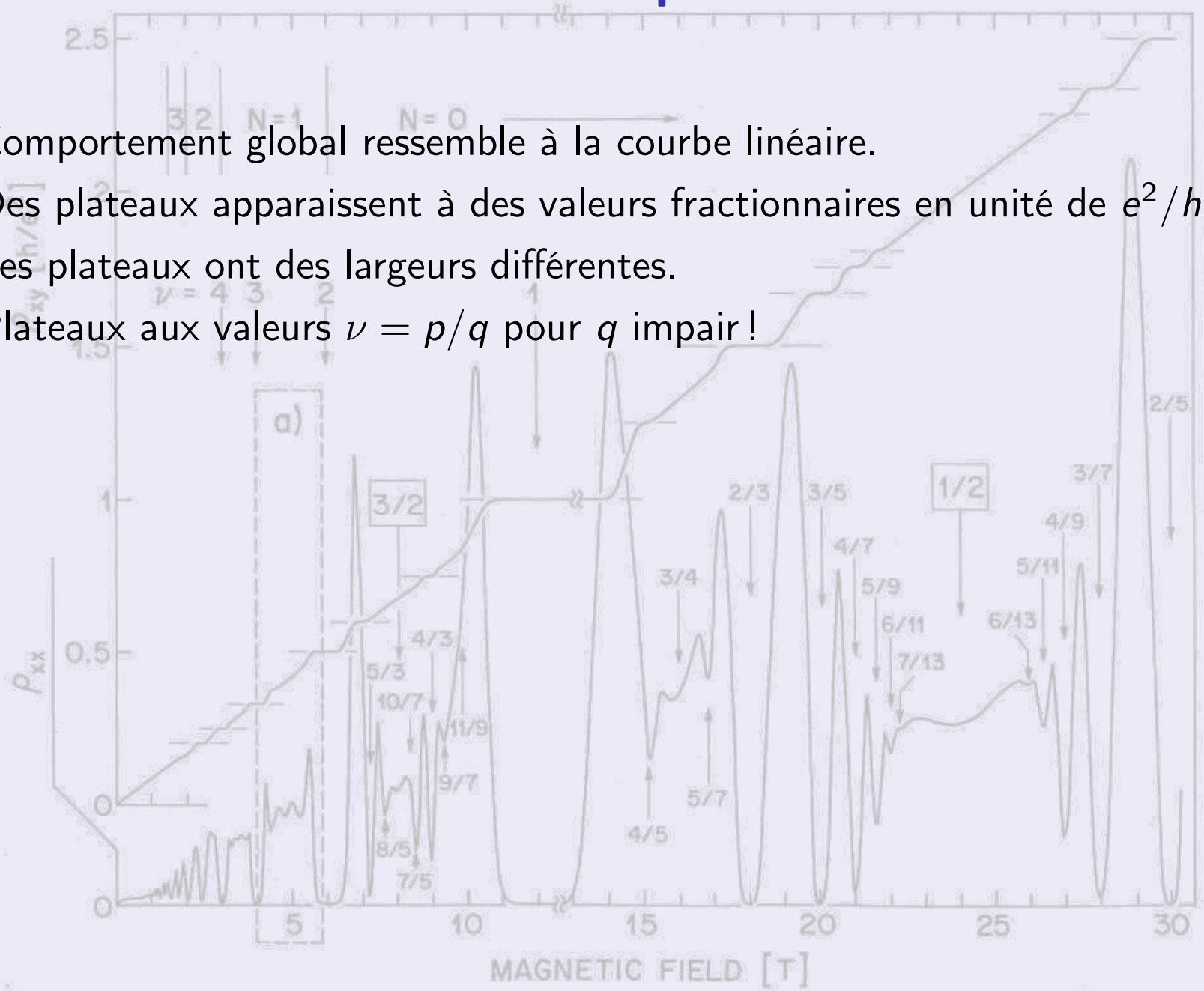
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.



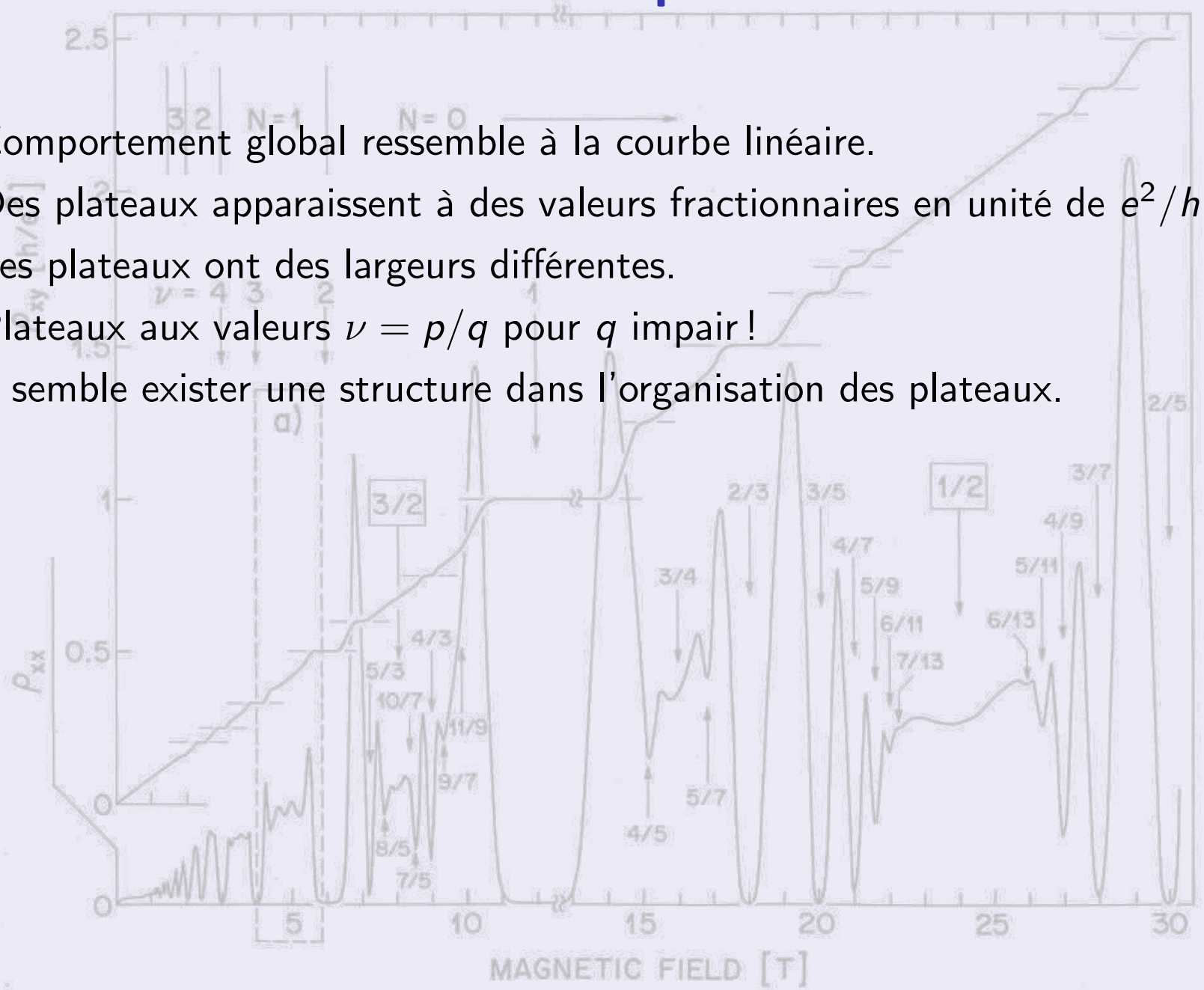
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !



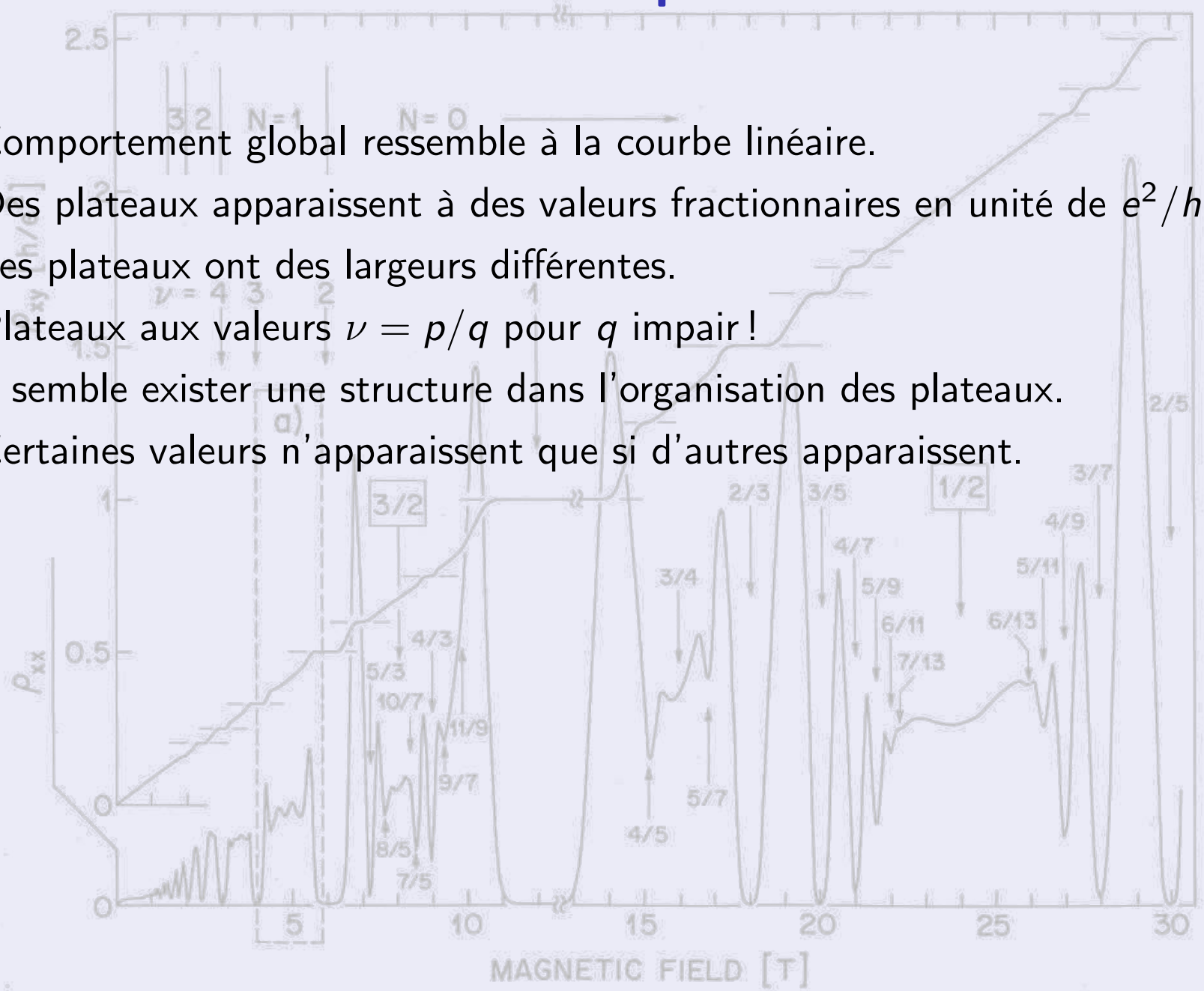
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !
- Il semble exister une structure dans l'organisation des plateaux.



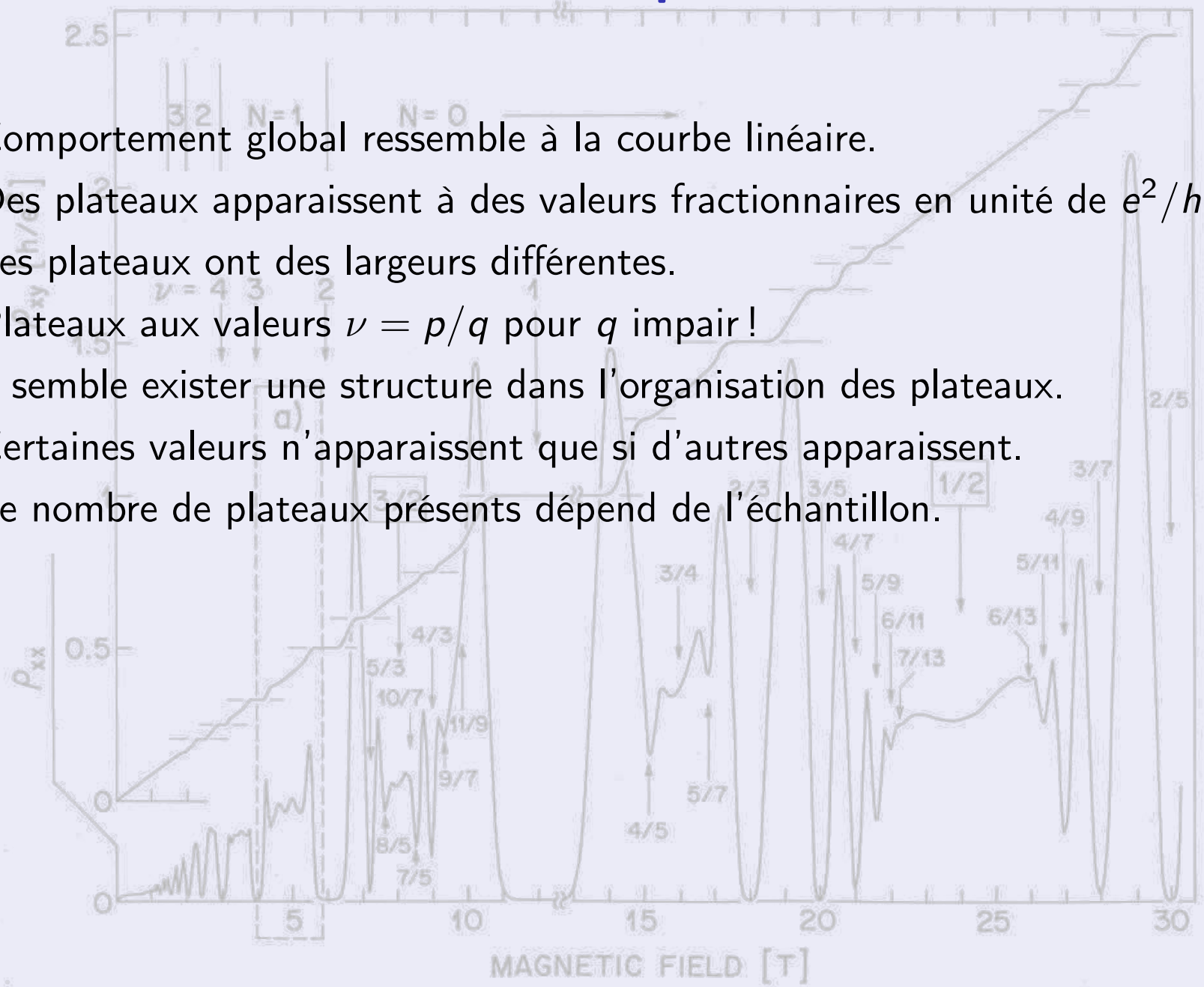
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !
- Il semble exister une structure dans l'organisation des plateaux.
- Certaines valeurs n'apparaissent que si d'autres apparaissent.

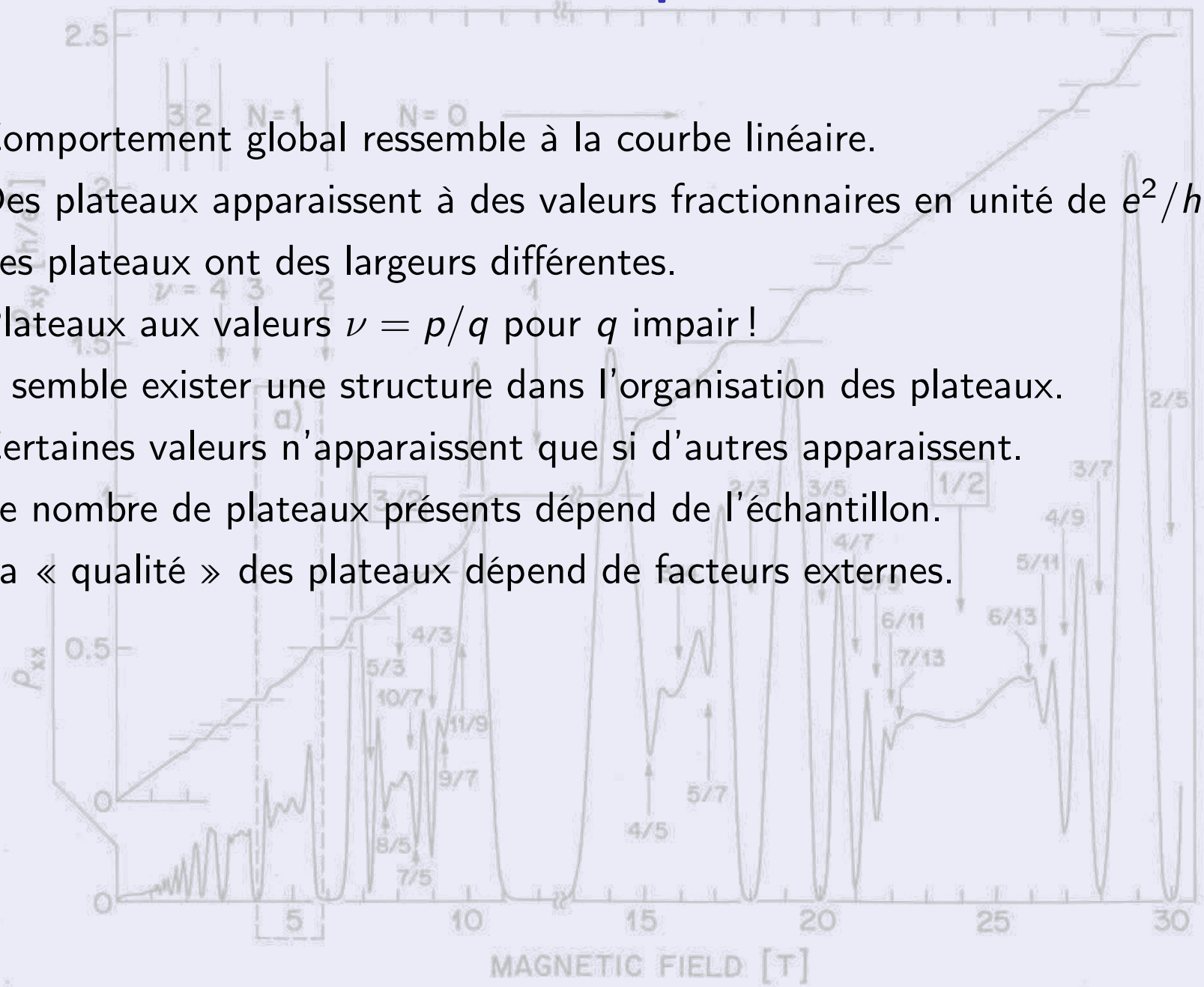


Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !
- Il semble exister une structure dans l'organisation des plateaux.
- Certaines valeurs n'apparaissent que si d'autres apparaissent.
- Le nombre de plateaux présents dépend de l'échantillon.



Les résultats expérimentaux



- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !
- Il semble exister une structure dans l'organisation des plateaux.
- Certaines valeurs n'apparaissent que si d'autres apparaissent.
- Le nombre de plateaux présents dépend de l'échantillon.
- La « qualité » des plateaux dépend de facteurs externes.

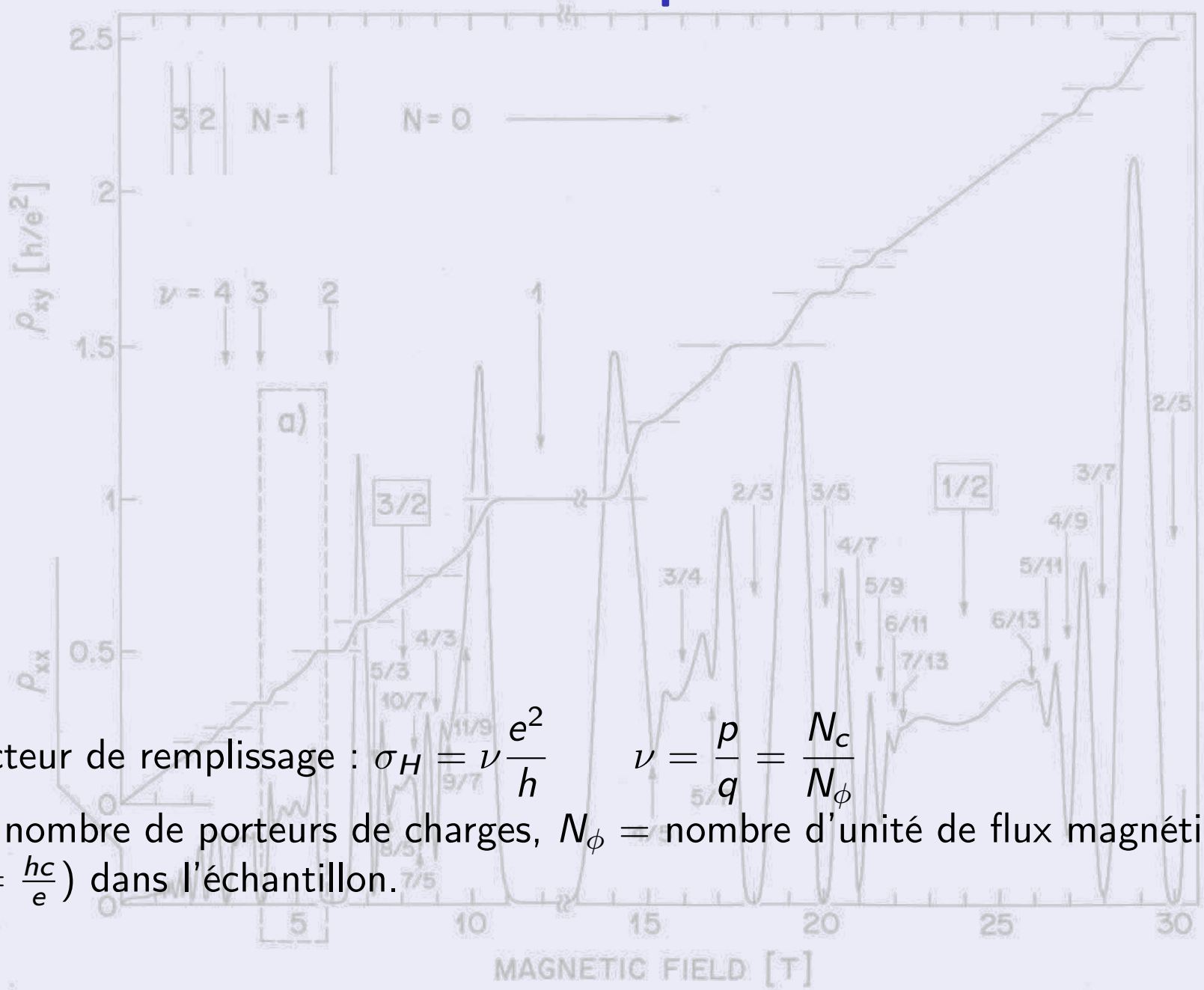
Les résultats expérimentaux

- Comportement global ressemble à la courbe linéaire.
- Des plateaux apparaissent à des valeurs fractionnaires en unité de e^2/h.
- Les plateaux ont des largeurs différentes.
- Plateaux aux valeurs $\nu = p/q$ pour q impair !
- Il semble exister une structure dans l'organisation des plateaux.
- Certaines valeurs n'apparaissent que si d'autres apparaissent.
- Le nombre de plateaux présents dépend de l'échantillon.
- La « qualité » des plateaux dépend de facteurs externes.

Le facteur de remplissage : $\sigma_H = \nu \dfrac{e^2}{h}$ $\qquad \nu = \dfrac{p}{q} = \dfrac{N_c}{N_\phi}$

N_c = nombre de porteurs de charges, N_ϕ = nombre d'unité de flux magnétiques ($\Phi_0 = \frac{hc}{e}$) dans l'échantillon.

Les résultats expérimentaux



Le facteur de remplissage : $\sigma_H = \nu \dfrac{e^2}{h}$ $\qquad \nu = \dfrac{p}{q} = \dfrac{N_c}{N_\phi}$

N_c = nombre de porteurs de charges, N_ϕ = nombre d'unité de flux magnétiques ($\Phi_0 = \frac{hc}{e}$) dans l'échantillon.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.
  Tentative de reproduire par des modèles les caractéristiques mesurées, soit dans un état particulier, soit dans des transitions entre états.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.
  Tentative de reproduire par des modèles les caractéristiques mesurées, soit dans un état particulier, soit dans des transitions entre états.
  Descriptions de type Landau-Ginzburg.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.
  Tentative de reproduire par des modèles les caractéristiques mesurées, soit dans un état particulier, soit dans des transitions entre états.
  Descriptions de type Landau-Ginzburg.
- Approche « fondamentale ».

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.
  Tentative de reproduire par des modèles les caractéristiques mesurées, soit dans un état particulier, soit dans des transitions entre états.
  Descriptions de type Landau-Ginzburg.
- Approche « fondamentale ».
  Tentative de partir des principes de la physique pour expliquer les grandes lignes de l'effet Hall quantique.

Les approches théoriques

Plusieurs approches théoriques ont été proposées pour tenter d'expliquer l'effet Hall quantique :

- Approche phénoménologique sur l'organisation des états.
  Tentative d'expliquer la structure globale de la courbe et du diagramme des phases.
  Théorie des groupes modulaires, Fermions Composites.
- Approche phénoménologique sur la physique des états.
  Tentative de reproduire par des modèles les caractéristiques mesurées, soit dans un état particulier, soit dans des transitions entre états.
  Descriptions de type Landau-Ginzburg.
- Approche « fondamentale ».
  Tentative de partir des principes de la physique pour expliquer les grandes lignes de l'effet Hall quantique.
  Mécanique quantique, fonctions modulaires, géométrie différentielle. . .

Les diagrammes de visibilité

L'effet Hall Quantique

Les diagrammes de visibilité
- Les familles
- Les groupes modulaires
- Les diagrammes des bandes

Le diagramme des phases

La mécanique quantique du problème

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

- Familles de Jain.

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

- Familles de Jain. Le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2m}$ donne lieu à la série

$$\nu = \frac{p}{2mp \pm 1}$$

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

- Familles de Jain. Le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2m}$ donne lieu à la série

$$\nu = \frac{p}{2mp \pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_{CF} = p$$

L'effet Hall à ces valeurs est comme un effet Hall entier pour des fermions « transformés ».

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

- Familles de Jain. Le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2m}$ donne lieu à la série

$$\nu = \frac{p}{2mp \pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_{CF} = p$$

  L'effet Hall à ces valeurs est comme un effet Hall entier pour des fermions « transformés ».
- Familles de Halperin et Haldane.

Les familles

Les états ont été classés par familles inspirées de modèles de type « fermions composites », « quasiparticules ».

- Familles de Jain. Le facteur de remplissage $\nu = \frac{1}{2m}$ donne lieu à la série

$$\nu = \frac{p}{2mp \pm 1} \quad \Leftrightarrow \quad \nu_{CF} = p$$

  L'effet Hall à ces valeurs est comme un effet Hall entier pour des fermions « transformés ».

- Familles de Halperin et Haldane.

$$\nu = \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{2r_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{2r_{n-1} + \cfrac{1}{2r_n}}}}}$$

  où k est impair et les r_i entiers positifs ou négatifs.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

pour z dans le 1/2-plan supérieur.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

À partir de $\Gamma(2)$, il est possible d'engendrer un diagramme des bandes.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

À partir de $\Gamma(2)$, il est possible d'engendrer un diagramme des bandes. Construction motivée par les familles de Jain.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

À partir de $\Gamma(2)$, il est possible d'engendrer un diagramme des bandes.
Construction motivée par les familles de Jain.
Soit $\lambda = \frac{(2s+1)}{2r}$ pour $r, s \geq 0$.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

À partir de $\Gamma(2)$, il est possible d'engendrer un diagramme des bandes.
Construction motivée par les familles de Jain.
Soit $\lambda = \frac{(2s+1)}{2r}$ pour $r, s \geq 0$. Il existe des transformations $G^{\lambda}_{n,k} \in \Gamma(2)$ qui envoient $z = i\infty$ sur λ $(n, k \in \mathbb{Z})$.

Les groupes modulaires

Les groupes modulaires ont été proposés pour classer les états et générer les familles. Deux groupes ont été étudiés plus particulièrement :

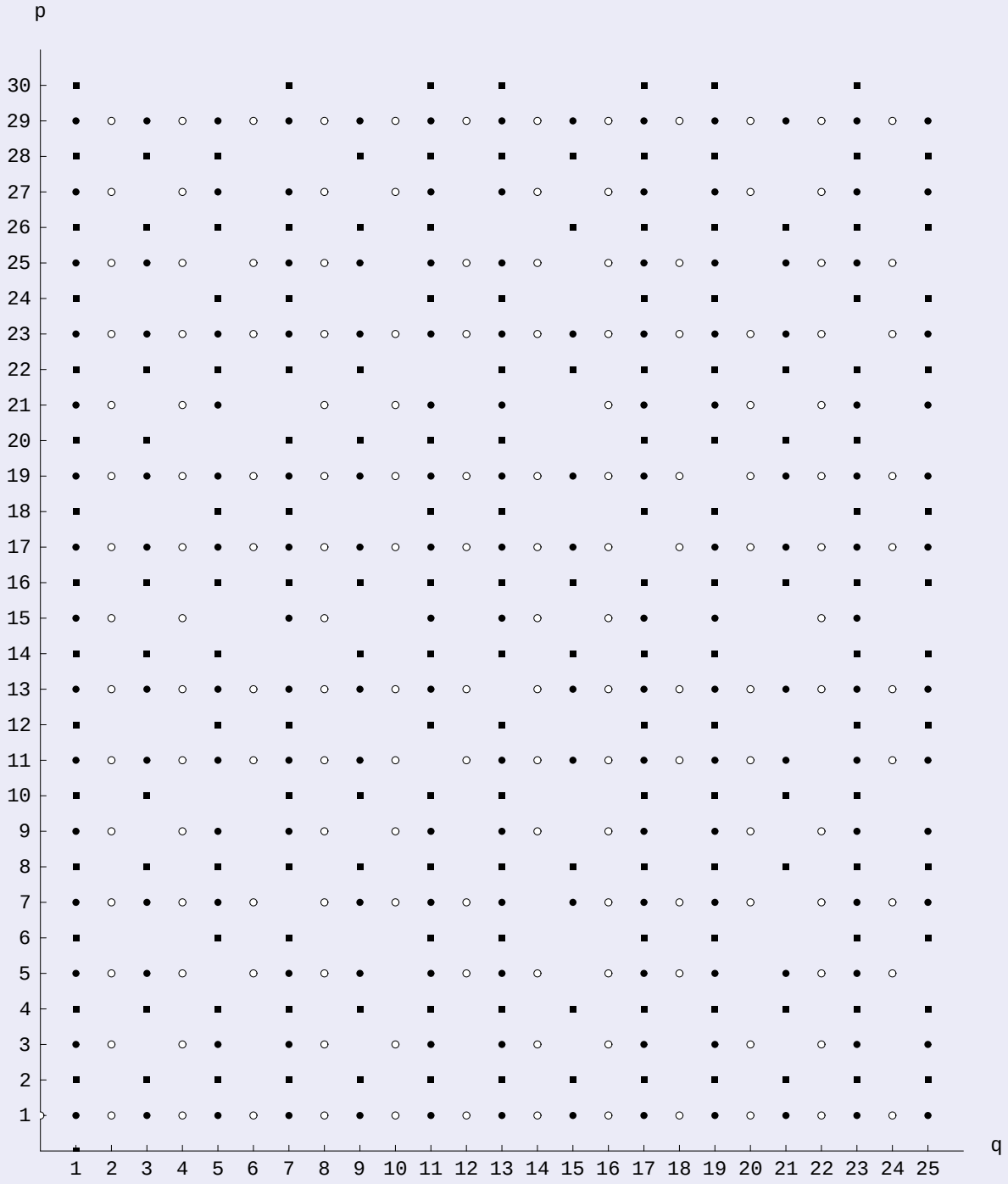
- $\Gamma_0(2)$: engendré par

$$T(z) = z + 1 \qquad \Sigma(z) = \frac{z}{2z+1}$$

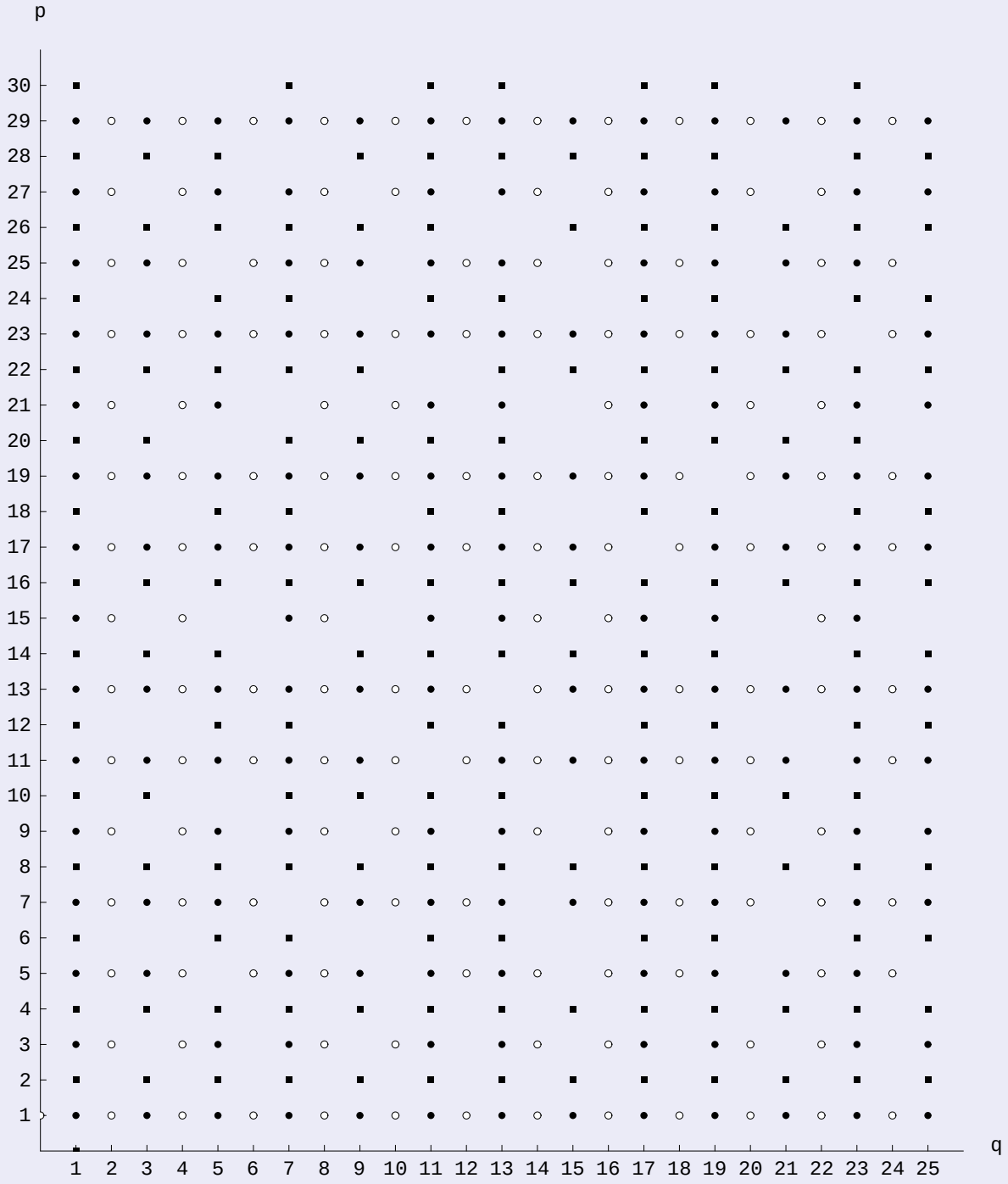
  pour z dans le 1/2-plan supérieur. Respecte la parité de q dans $z = p/q$.
- $\Gamma(2)$: engendré par T^2 et Σ. Respecte les parités de q et p.

Ces groupes ont été confrontés à l'expérience, en particulier pour expliquer les propriétés des transitions.

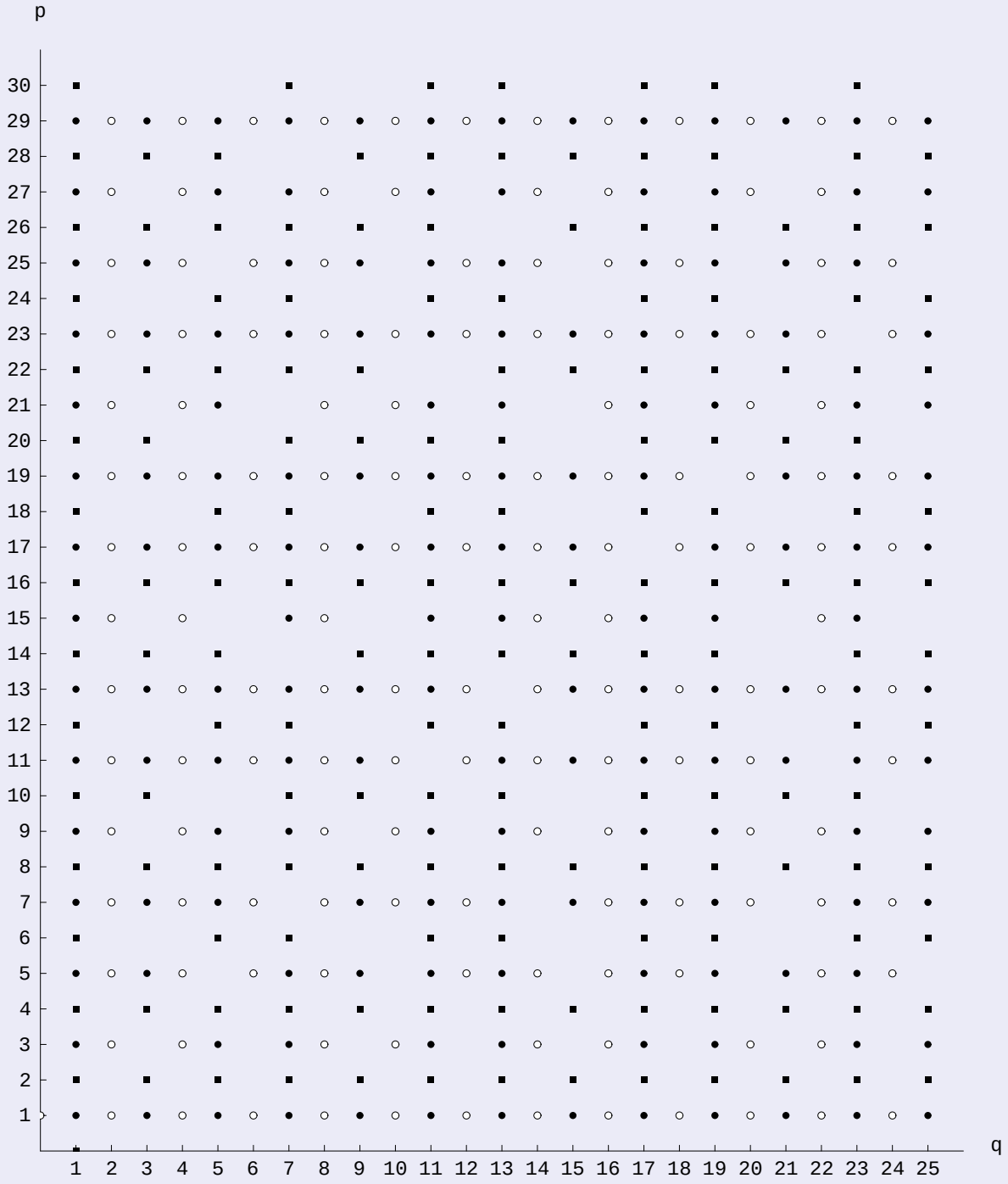
À partir de $\Gamma(2)$, il est possible d'engendrer un diagramme des bandes.
Construction motivée par les familles de Jain.
Soit $\lambda = \frac{(2s+1)}{2r}$ pour $r, s \geq 0$. Il existe des transformations $G^{\lambda}_{n,k} \in \Gamma(2)$ qui envoient $z = i\infty$ sur λ ($n, k \in \mathbb{Z}$). On associe à λ toutes les fractions $G^{\lambda}_{n,k}(0)$ et $G^{\lambda}_{n,k}(1)$.



Couples (q, p) premiers entre-eux. . .



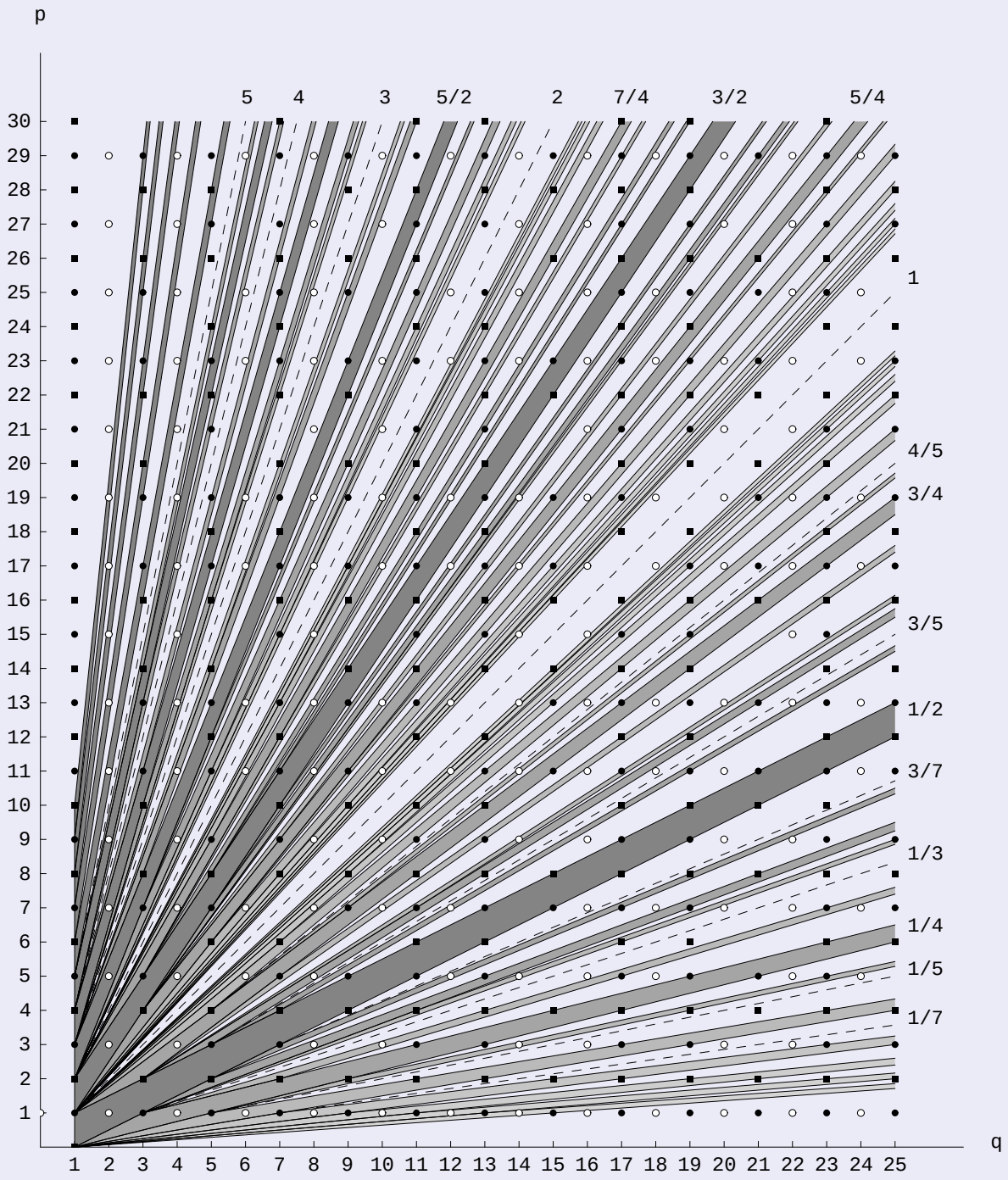
Couples (q, p) premiers entre-eux. . .
$\lambda = p/q$ pour q pair.



Couples (q, p) premiers entre-eux. . .

$\lambda = p/q$ pour q pair.

$\lambda \mapsto \{G^{\lambda}_{n,k}(0),\ G^{\lambda}_{n,k}(1)\}$



Bandes associées aux couples (q, p) pour
q pair
p impair.

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout ! Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout ! Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout ! Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !
Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.
Le point (q, p) est l'unique point dans la bande qui lui est associé.

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !
Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.
Le point (q, p) est l'unique point dans la bande qui lui est associé.
On généralise ce diagramme aux cas q impairs...

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !
Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.
Le point (q, p) est l'unique point dans la bande qui lui est associé.
On généralise ce diagramme aux cas q impairs...
Problème, car il y a chevauchement des bandes.

Les autres diagrammes des bandes

Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !
Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

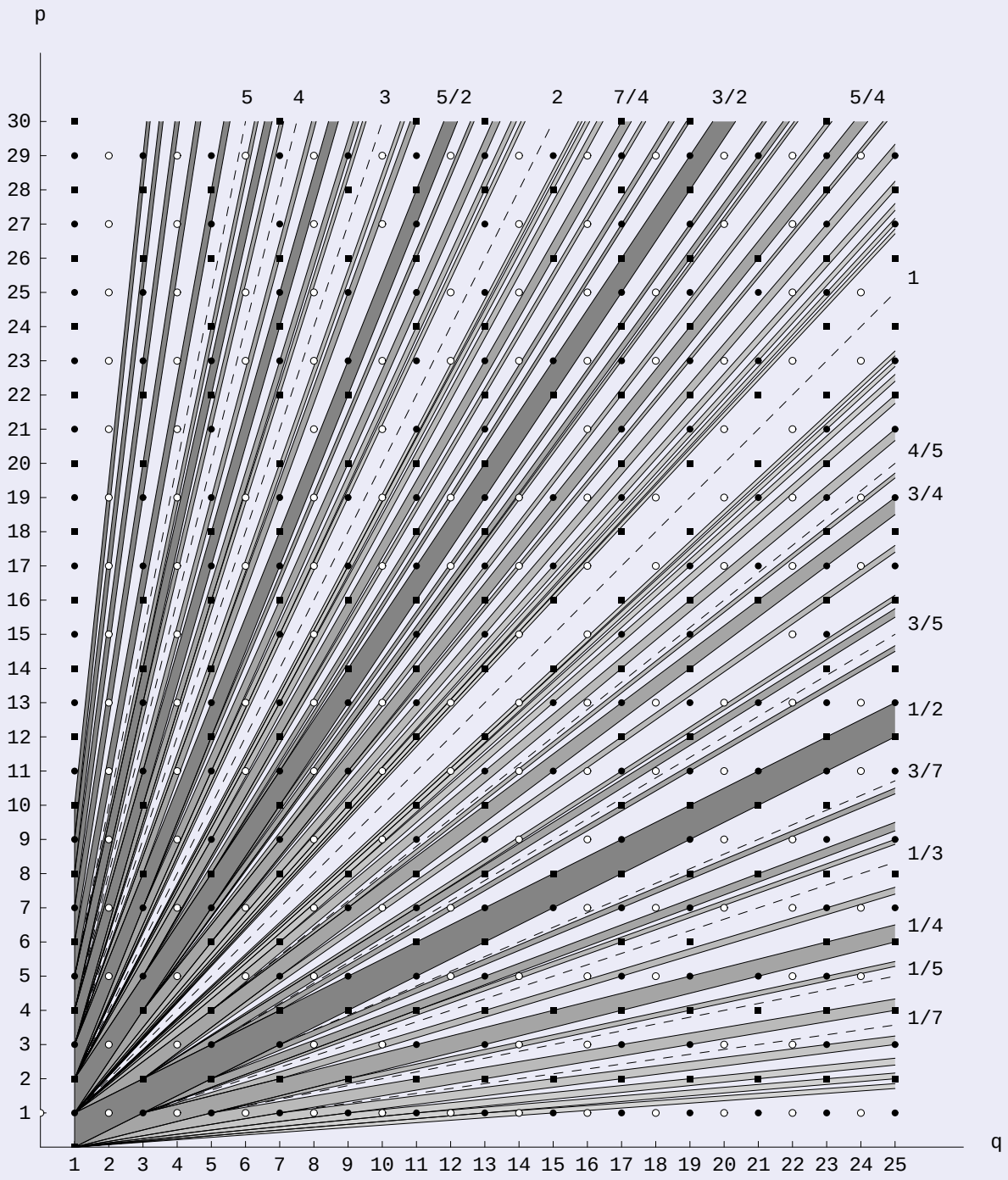
Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.
Le point (q, p) est l'unique point dans la bande qui lui est associé.
On généralise ce diagramme aux cas q impairs...
Problème, car il y a chevauchement des bandes.
On sépare donc les cas p impair et p pair.

Les autres diagrammes des bandes

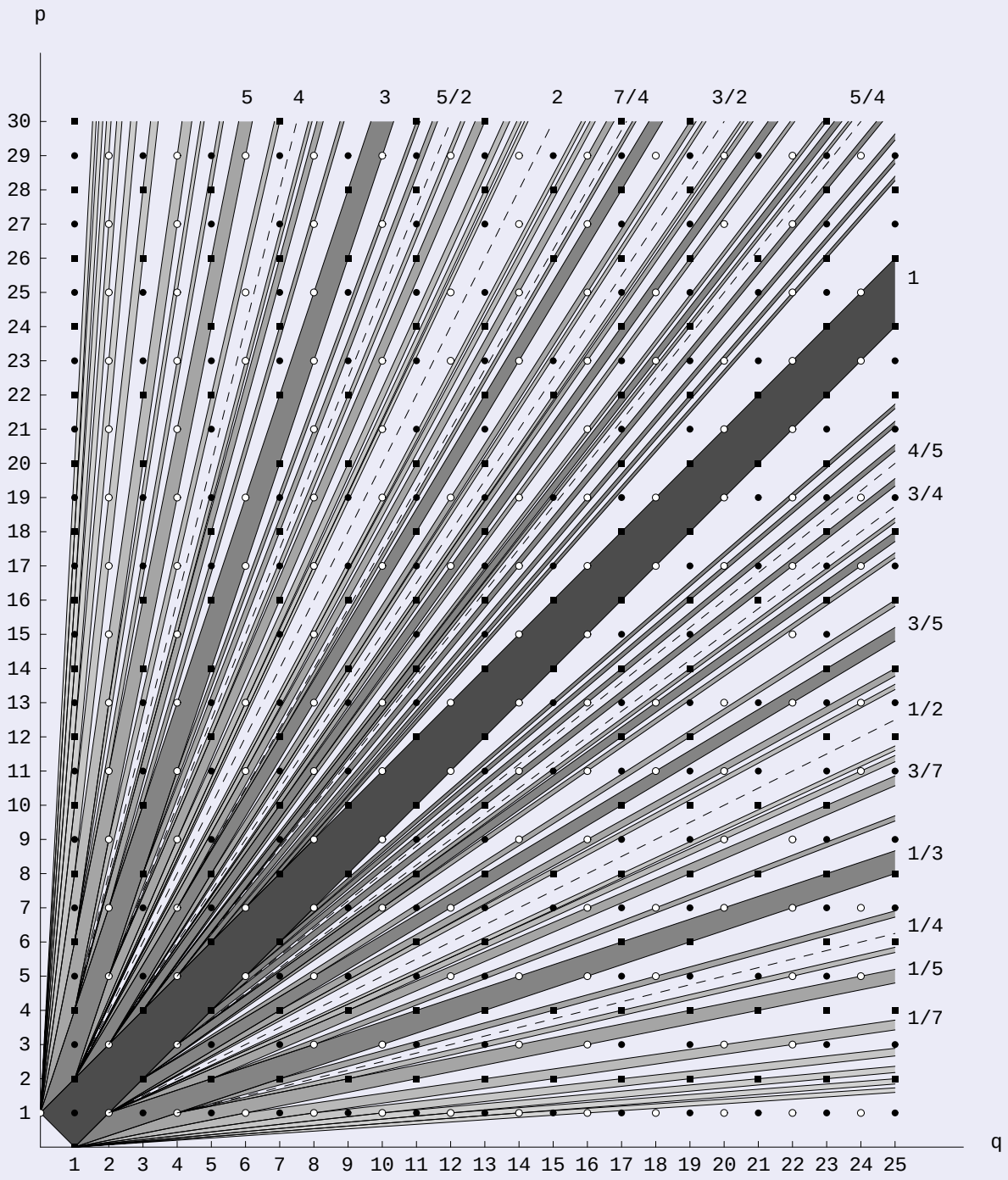
Ce diagramme peut être obtenu très simplement à partir du théorème de Bezout !
Pour tout couple (q, p) où q et p sont premiers entre eux, on associe tous les couples (a, b) (nécessairement premiers entre eux) tels que

$$qb - pa = 1 \quad \text{ou} \quad qb - pa = -1$$

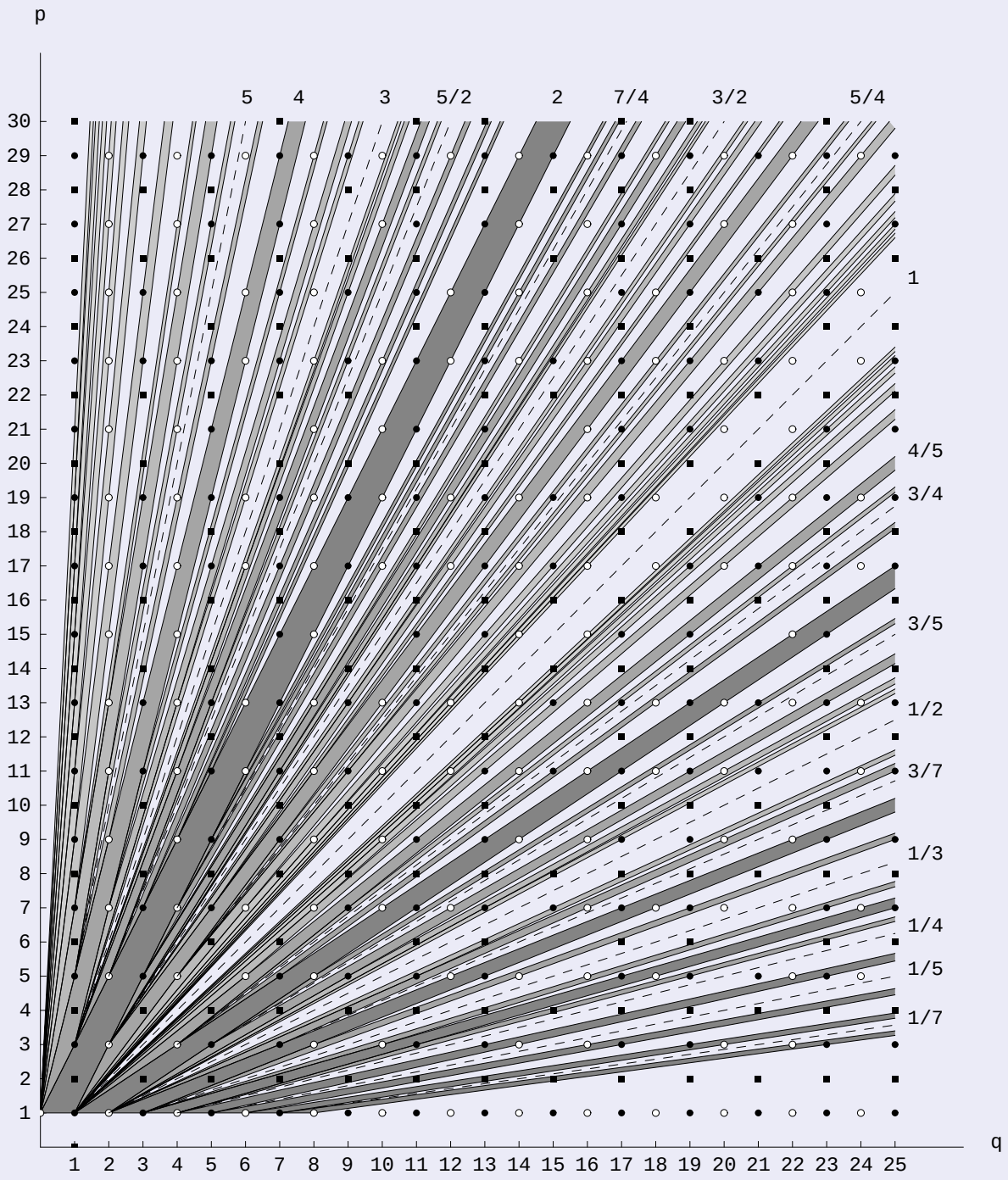
Facile de vérifier que si (a, b) est solution, alors $(a + q, b + p)$ l'est aussi, d'où deux droites parallèles de pente p/q ➔ une bande.
Le point (q, p) est l'unique point dans la bande qui lui est associé.
On généralise ce diagramme aux cas q impairs...
Problème, car il y a chevauchement des bandes.
On sépare donc les cas p impair et p pair.
On obtient finalement 3 diagrammes distincts selon les parités de q et p.



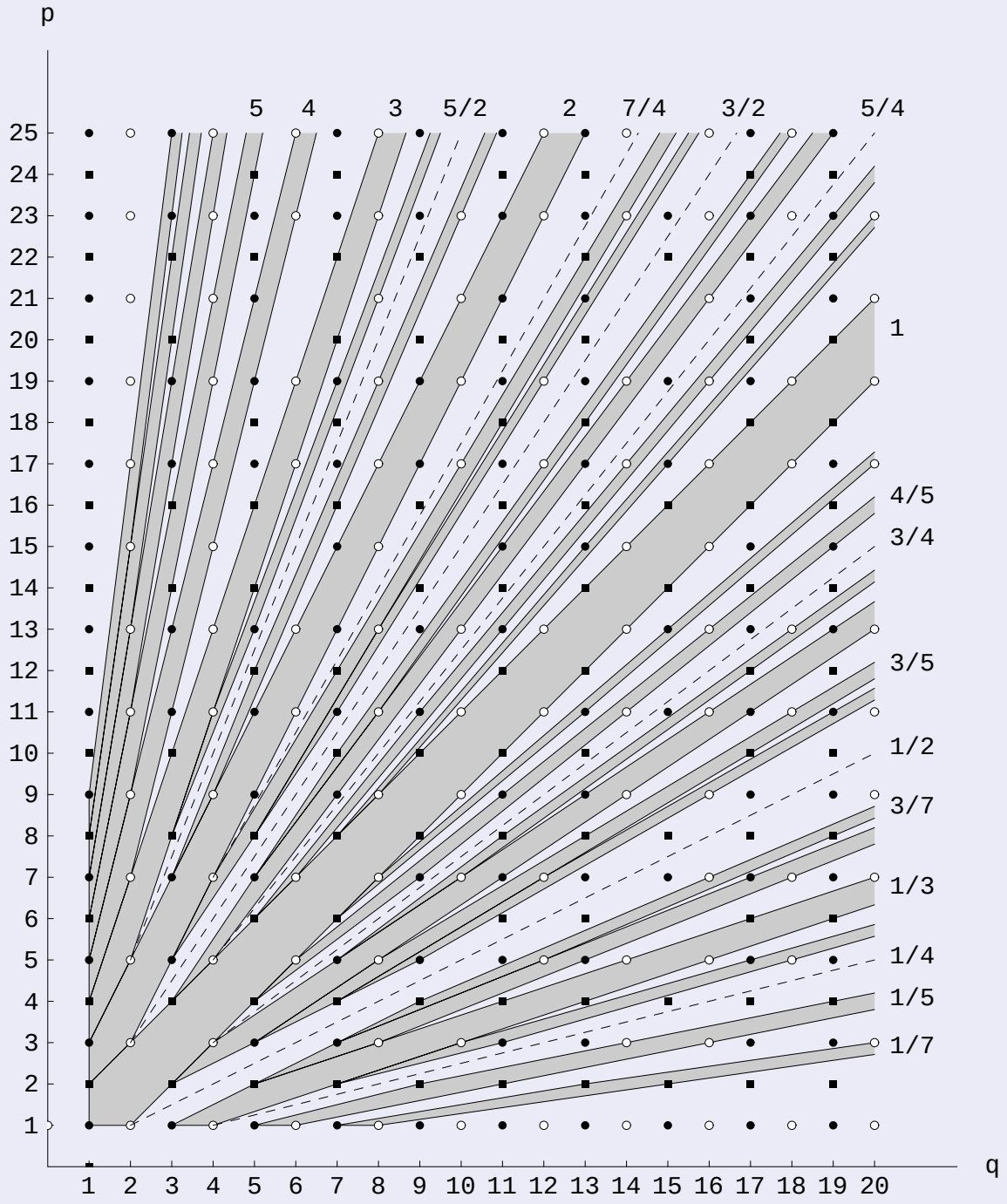
Bandes associées aux couples (q, p) pour
q pair
p impair.



Bandes associées aux couples (q, p) pour
q impair
p impair.

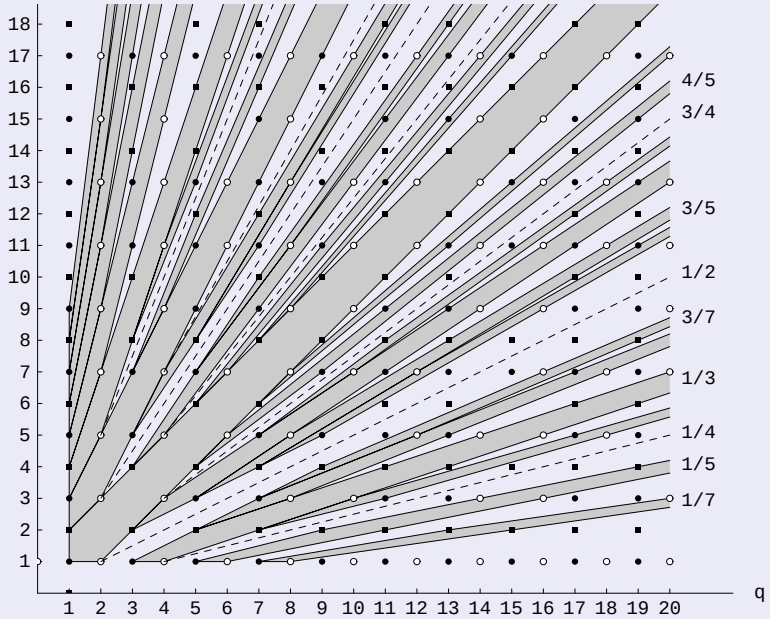


Bandes associées aux couples (q, p) pour
q impair
p pair.

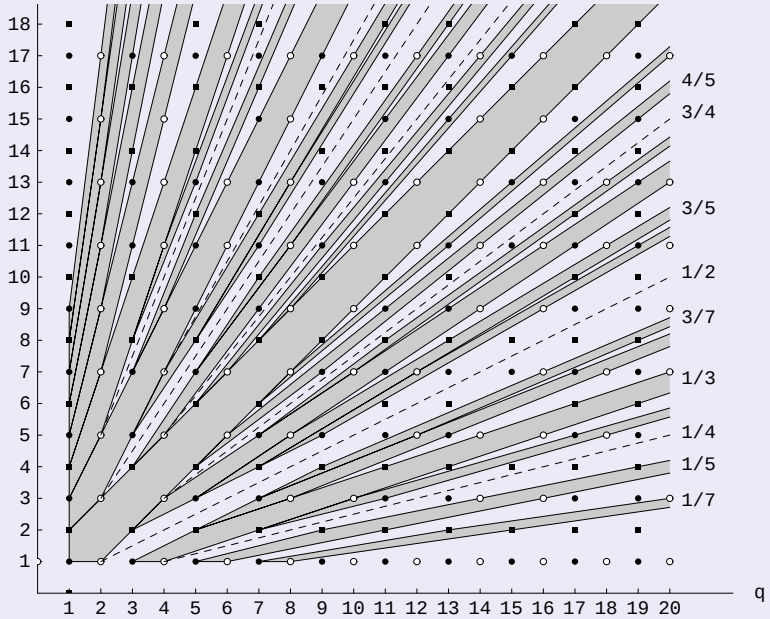


Bandes associées aux couples (q, p) pour q impair.
On se donne une règle pour éviter les chevauchements.

Que disent ces diagrammes ?

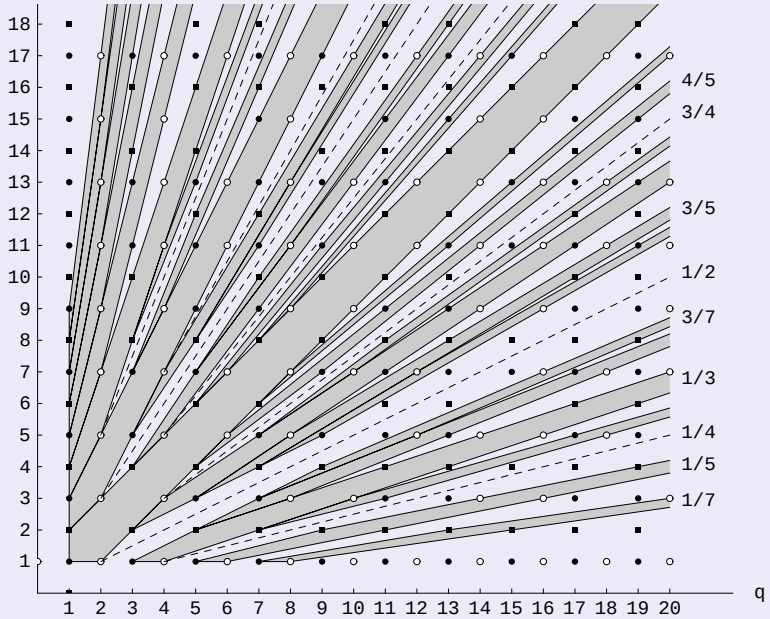


Que disent ces diagrammes ?



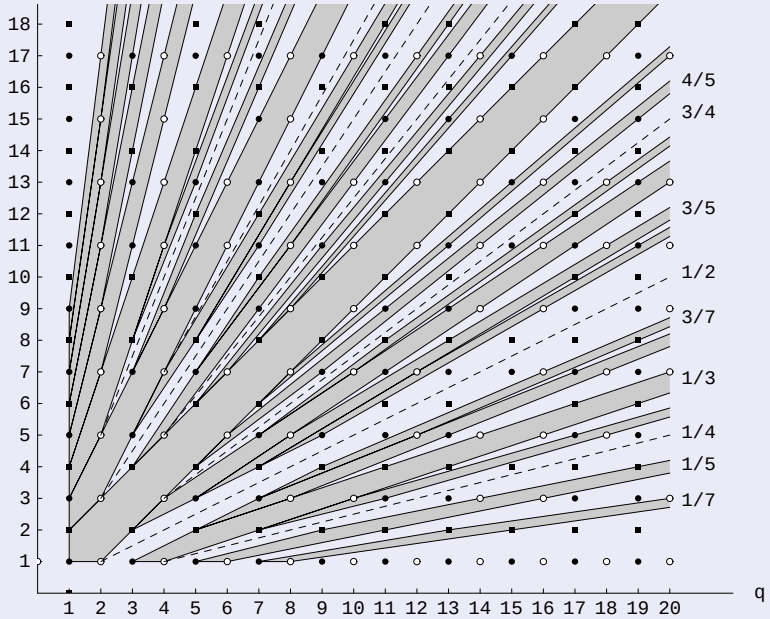
- q se comporte comme N_ϕ et p comme N_c.

Que disent ces diagrammes ?



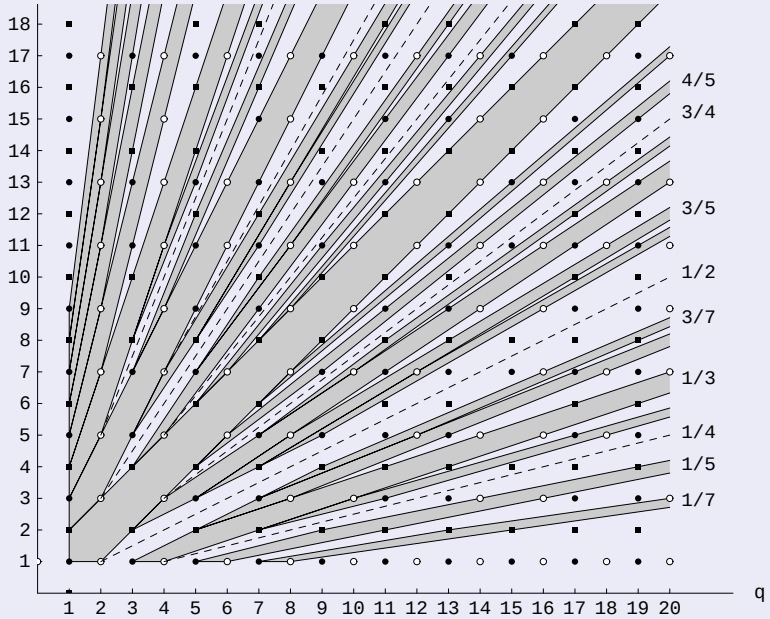
- q se comporte comme N_ϕ et p comme N_c.
- Ces bandes font apparaitre des hiérarchies : elles généralisent celles de Jain et de Halperin-Haldane.

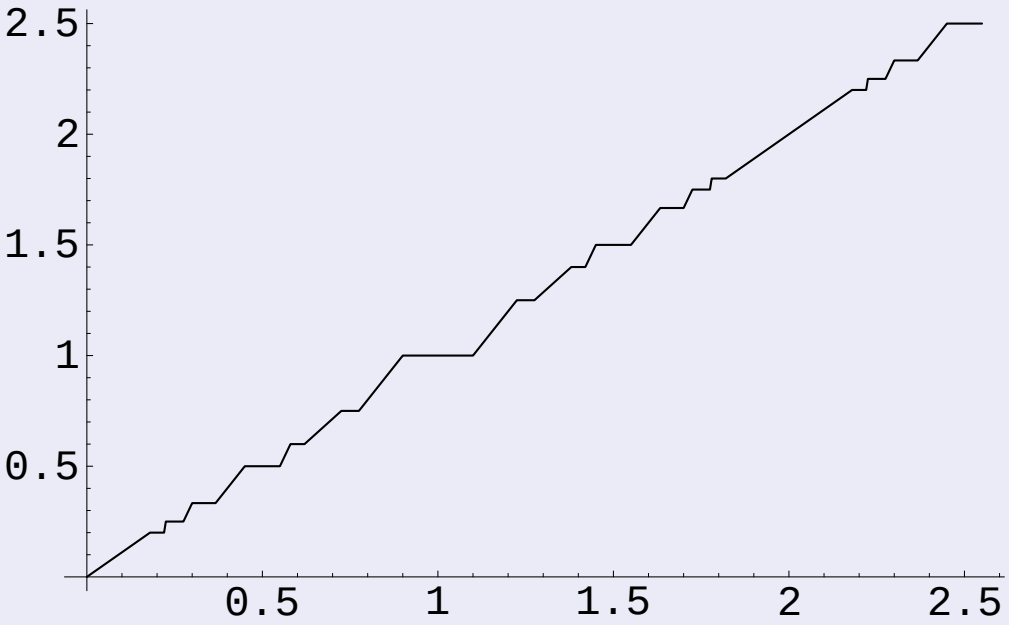
Que disent ces diagrammes ?



- q se comporte comme N_ϕ et p comme N_c.
- Ces bandes font apparaitre des hiérarchies : elles généralisent celles de Jain et de Halperin-Haldane.
- À chaque couple (q, p), on peut associer la largeur de la bande.

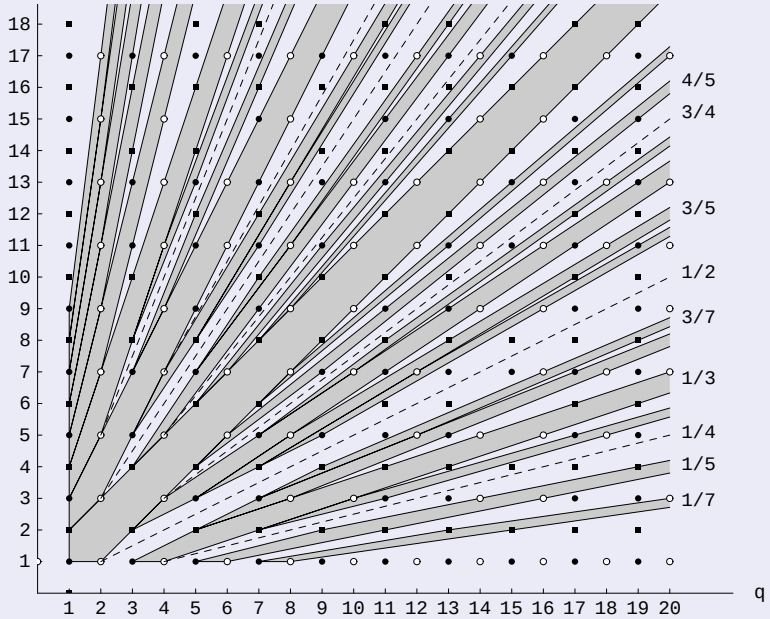
Que disent ces diagrammes ?

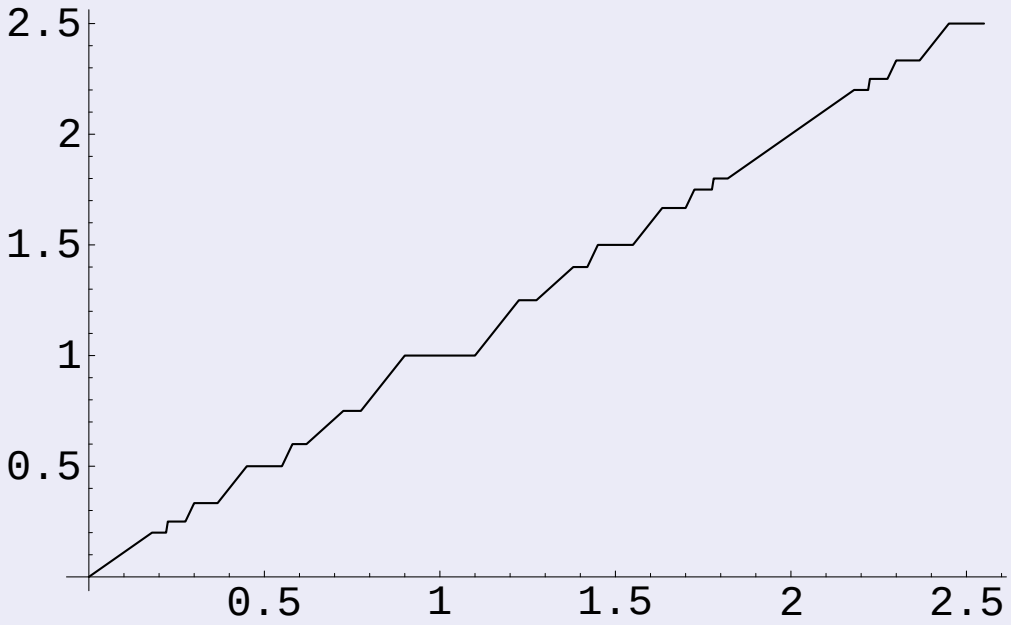




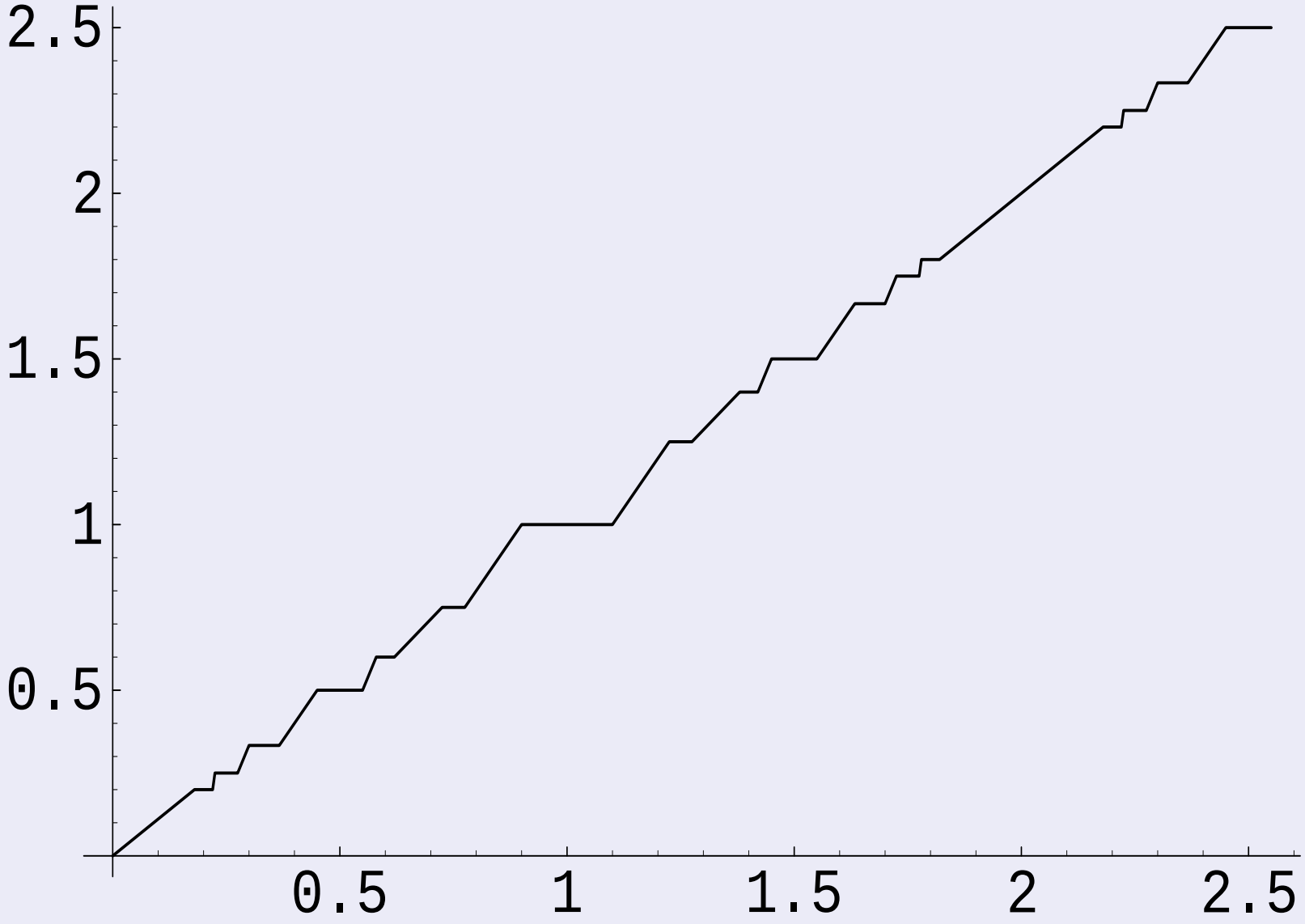
- q se comporte comme N_ϕ et p comme N_c.
- Ces bandes font apparaitre des hiérarchies : elles généralisent celles de Jain et de Halperin-Haldane.
- À chaque couple (q, p), on peut associer la largeur de la bande.

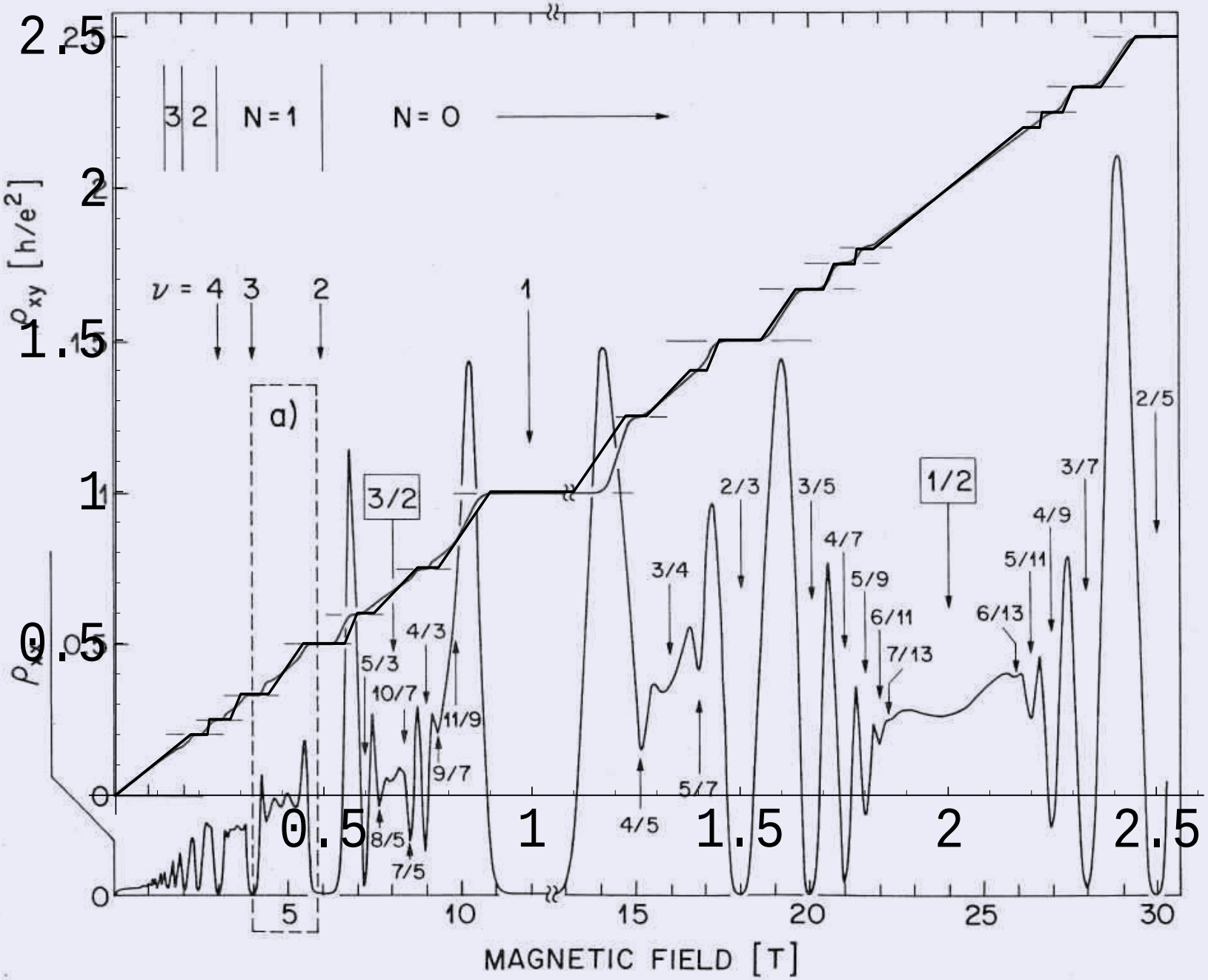
Que disent ces diagrammes ?





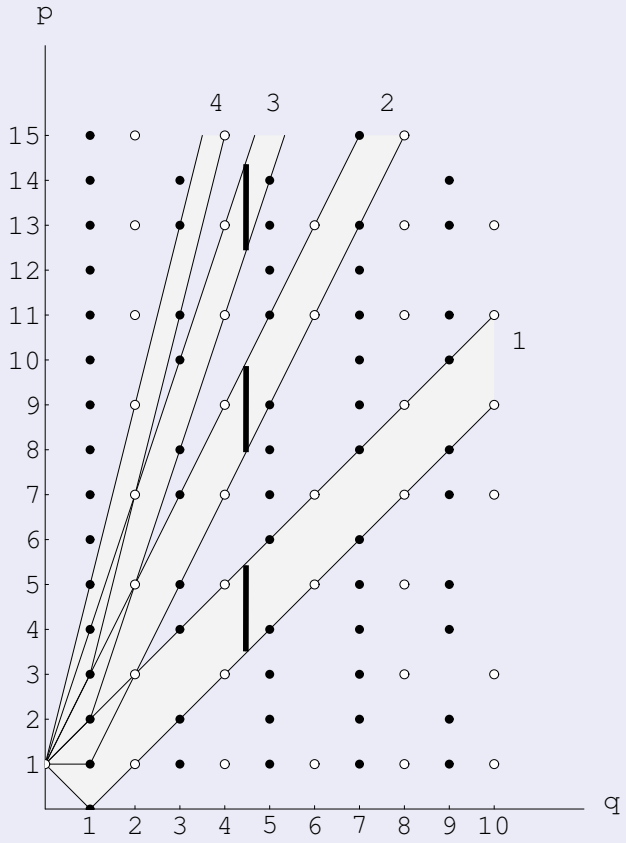
- q se comporte comme N_ϕ et p comme N_c.
- Ces bandes font apparaitre des hiérarchies : elles généralisent celles de Jain et de Halperin-Haldane.
- À chaque couple (q, p), on peut associer la largeur de la bande.
- On peut comparer cette courbe à l'expérience. . .


2.5
2
1.5
1
0.5
0.5
1
1.5
2
2.5

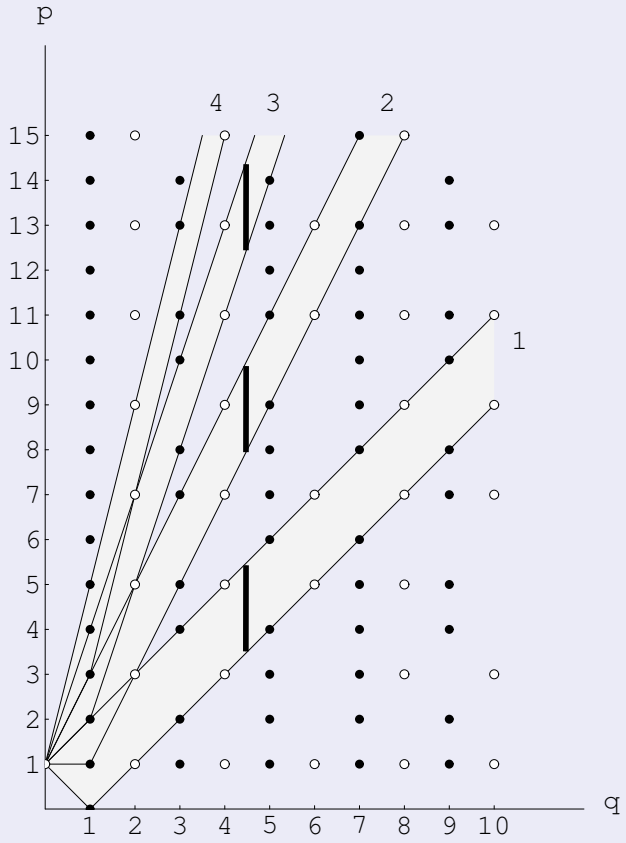


Comparaison de la courbe et de l'expérience

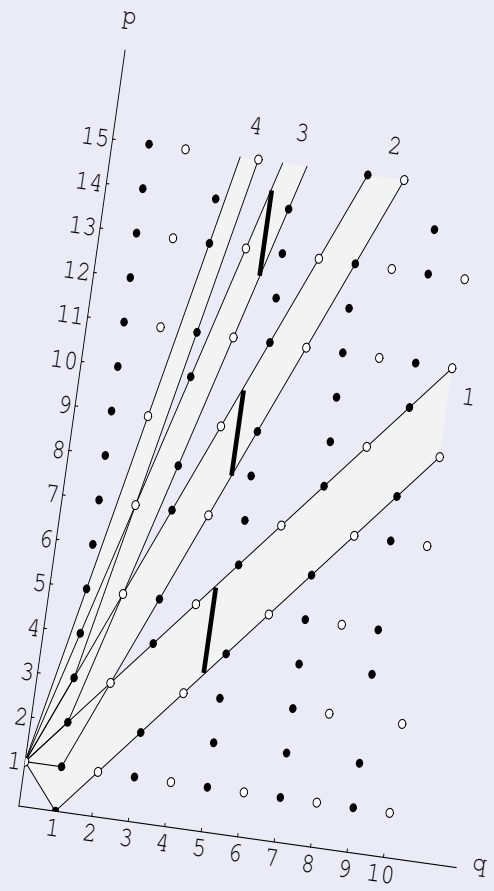
Vues les bandes !



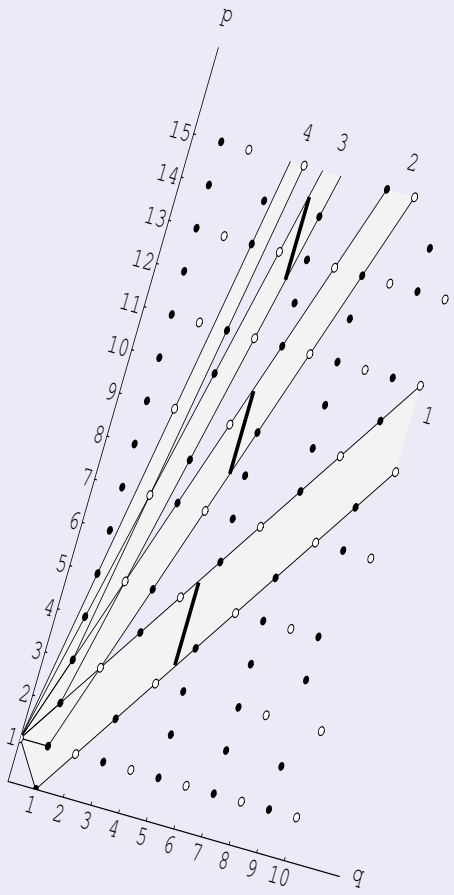
Vues les bandes !



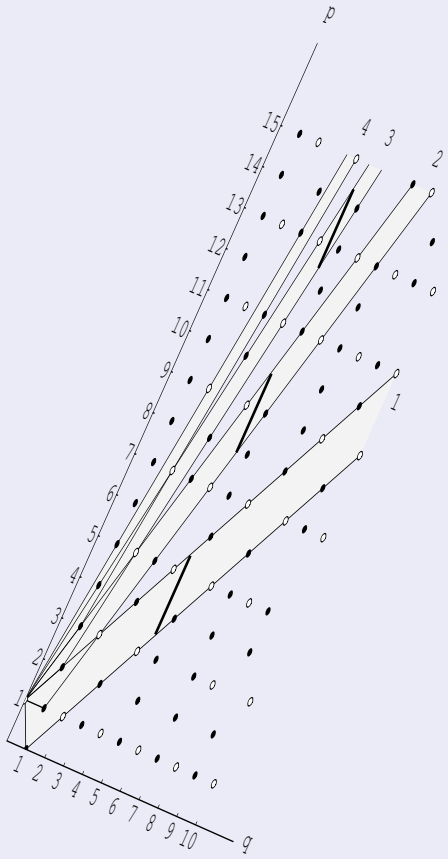
Vues les bandes !



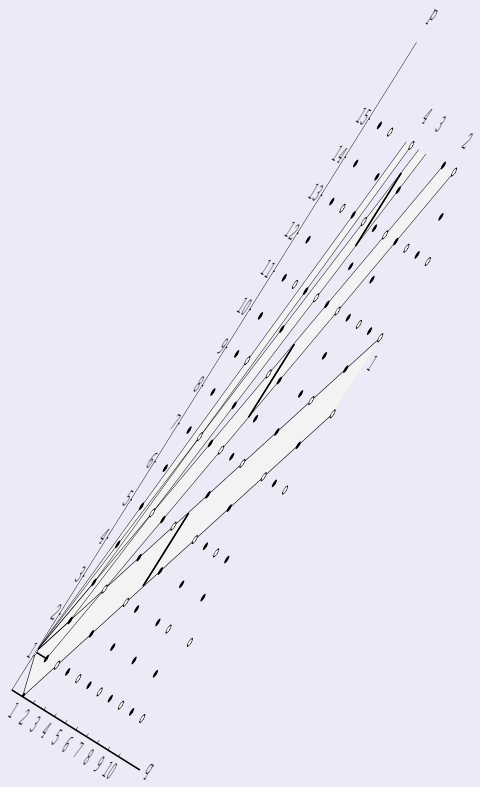
Vues les bandes !



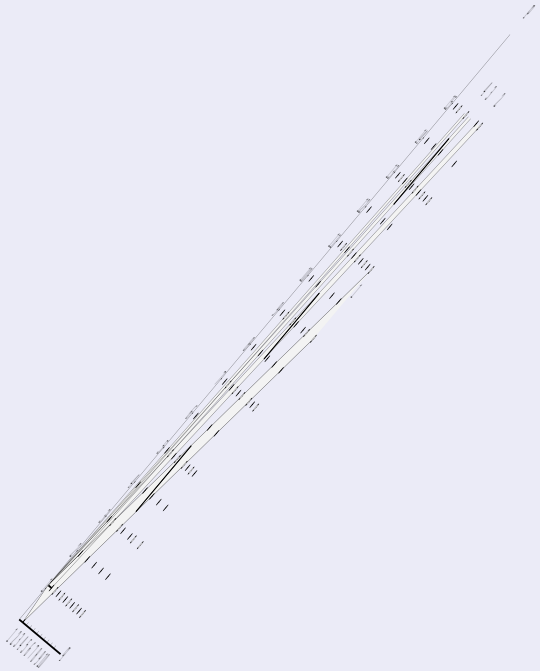
Vues les bandes !



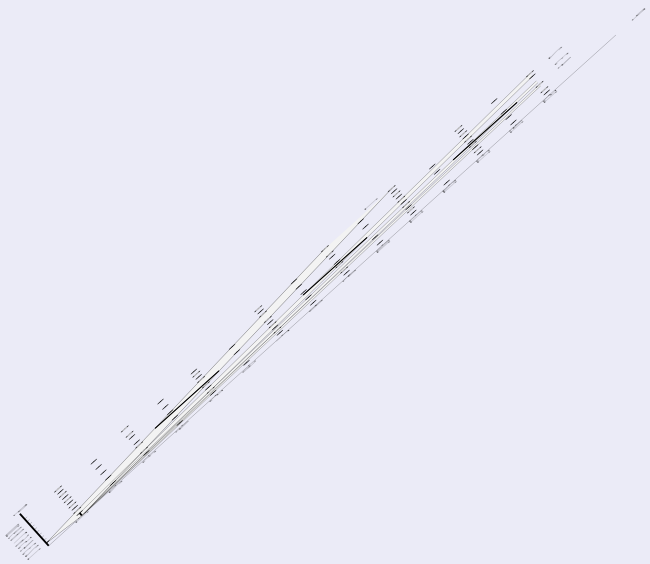
Vues les bandes !



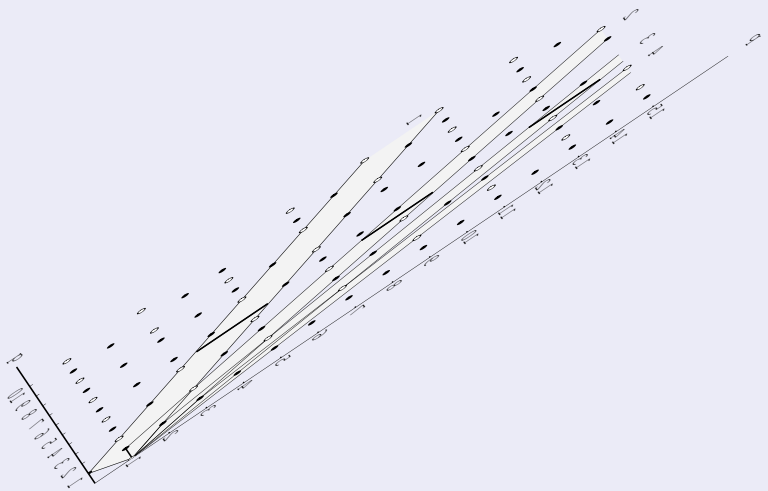
Vues les bandes !



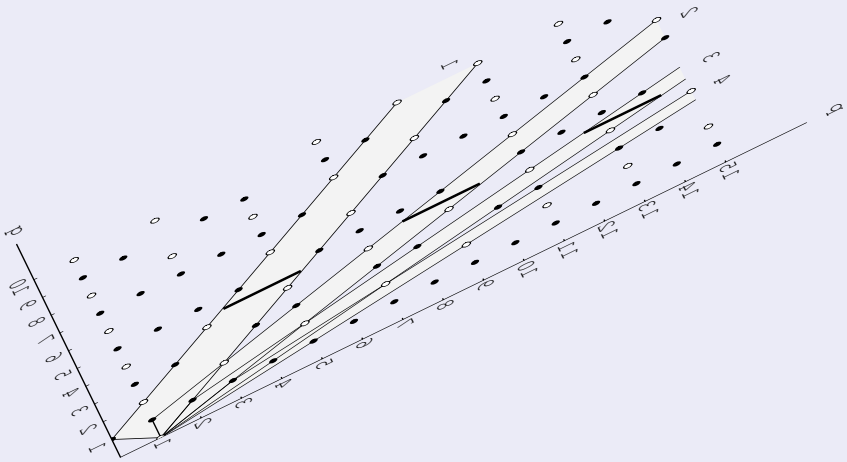
Vues les bandes !



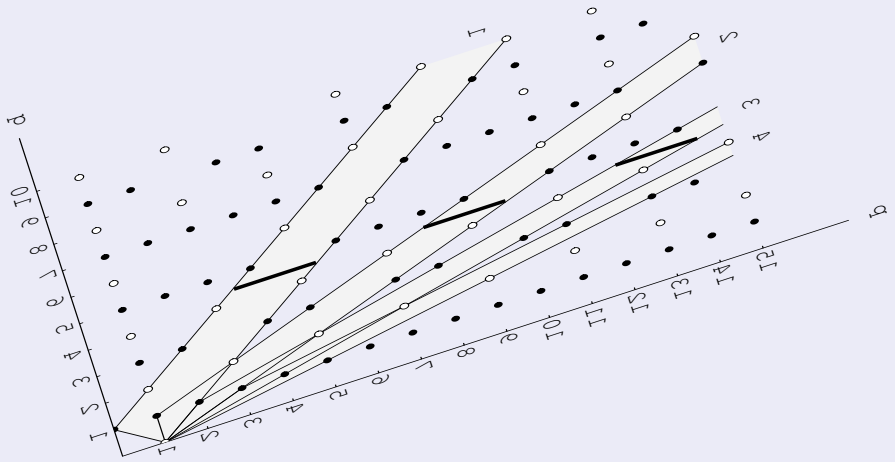
Vues les bandes !



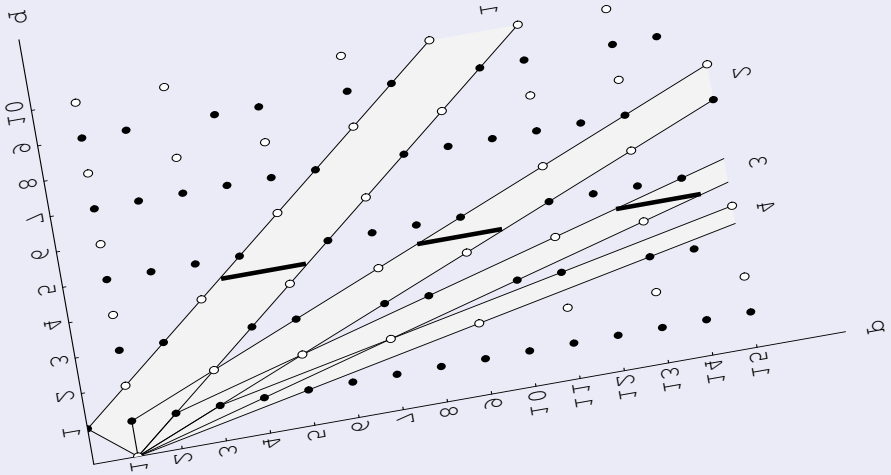
Vues les bandes !



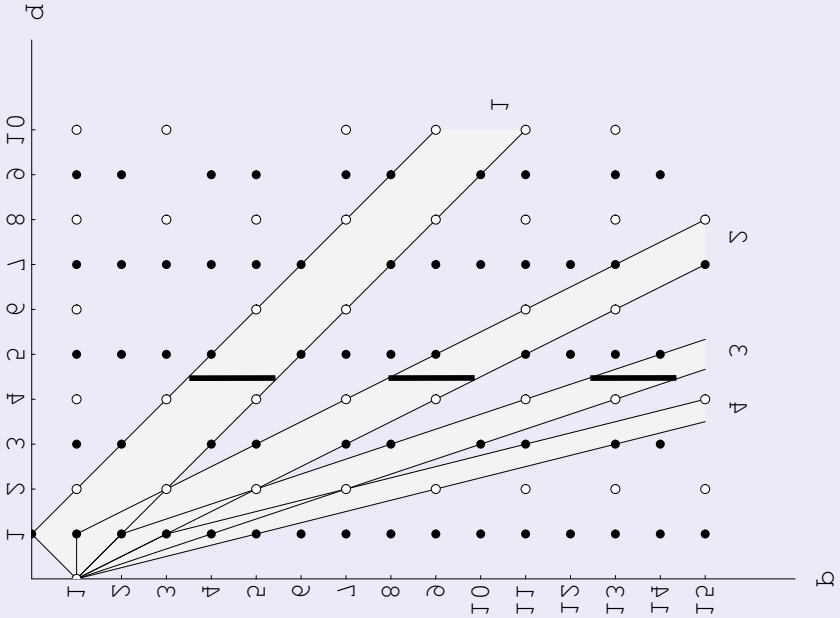
Vues les bandes !



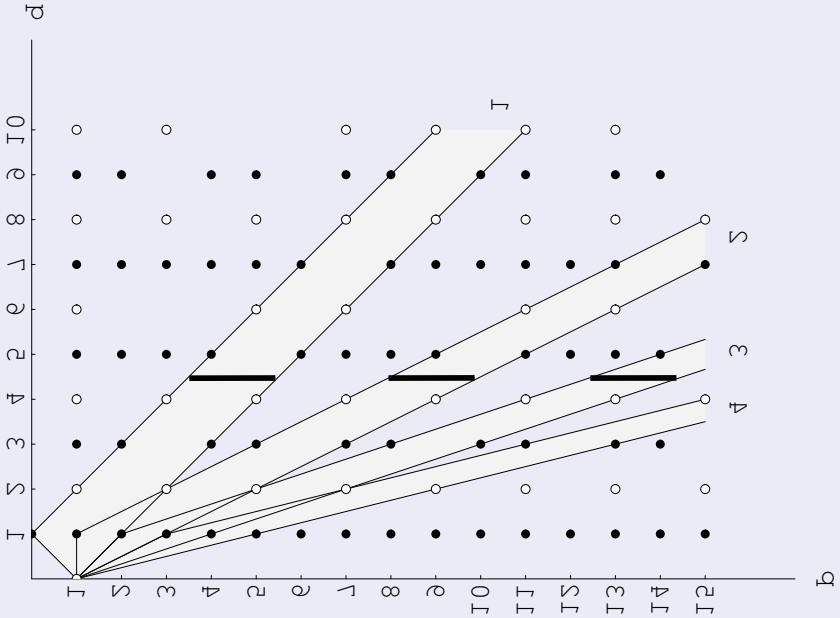
Vues les bandes !

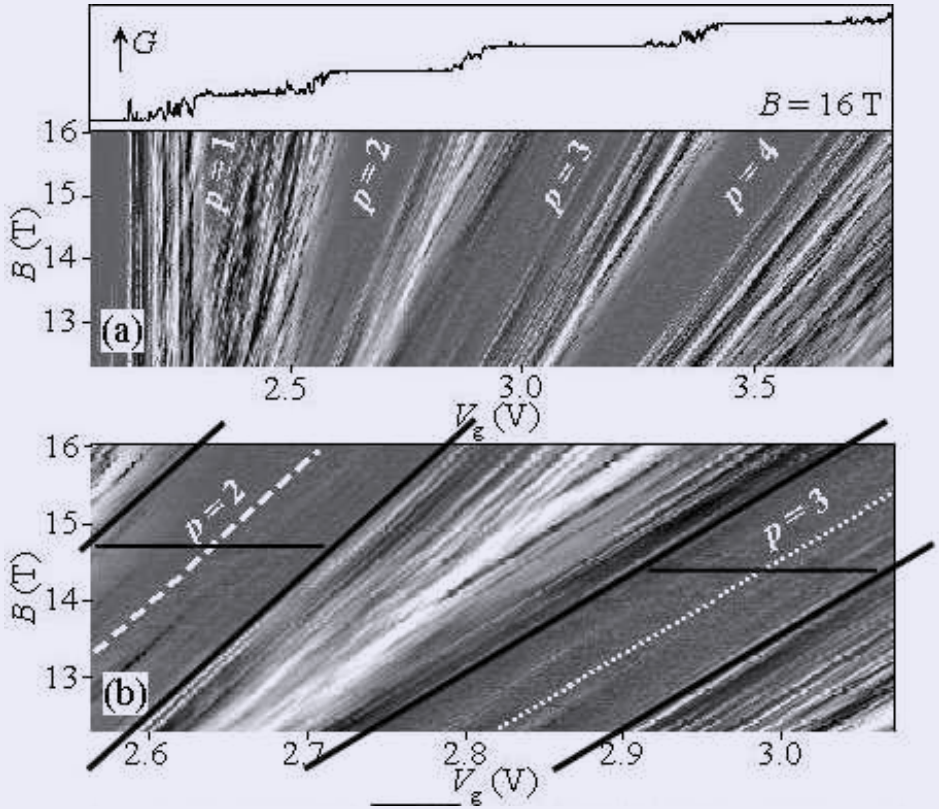


Vues les bandes !


q
p
1
5
3
4
2
6
7
8
9
10
11
15
13
14
12
1
5
3
4
2
6
7
8
9
10
1
5
3
4
2
6
7
8
9
10
1
5
3
4
2
6
7
8
9
10

Vues les bandes !





Bandes observées dans une expérience. . .

Le diagramme des phases

L'effet Hall Quantique

Les diagrammes de visibilité

Le diagramme des phases
- Le diagramme des phases expérimental
- Le diagramme des phases prédit
- Le système dynamique associé

La mécanique quantique du problème

Le diagramme des phases expérimental

Le diagramme des phases expérimental

En étudiant les transitions entre les états, les expérimentateurs ont produit des diagrammes des phases de l'effet Hall quantique.

Le diagramme des phases expérimental

En étudiant les transitions entre les états, les expérimentateurs ont produit des diagrammes des phases de l'effet Hall quantique.

Les variables retenues sont B en abscisse et N_c en ordonnée, ou bien $1/\nu$ en abscisse, et un autre paramètre plus physique, lié au désordre, en ordonnée...

Le diagramme des phases expérimental

En étudiant les transitions entre les états, les expérimentateurs ont produit des diagrammes des phases de l'effet Hall quantique.

Les variables retenues sont B en abscisse et N_c en ordonnée, ou bien $1/\nu$ en abscisse, et un autre paramètre plus physique, lié au désordre, en ordonnée...

Le désordre est relié à N_c.

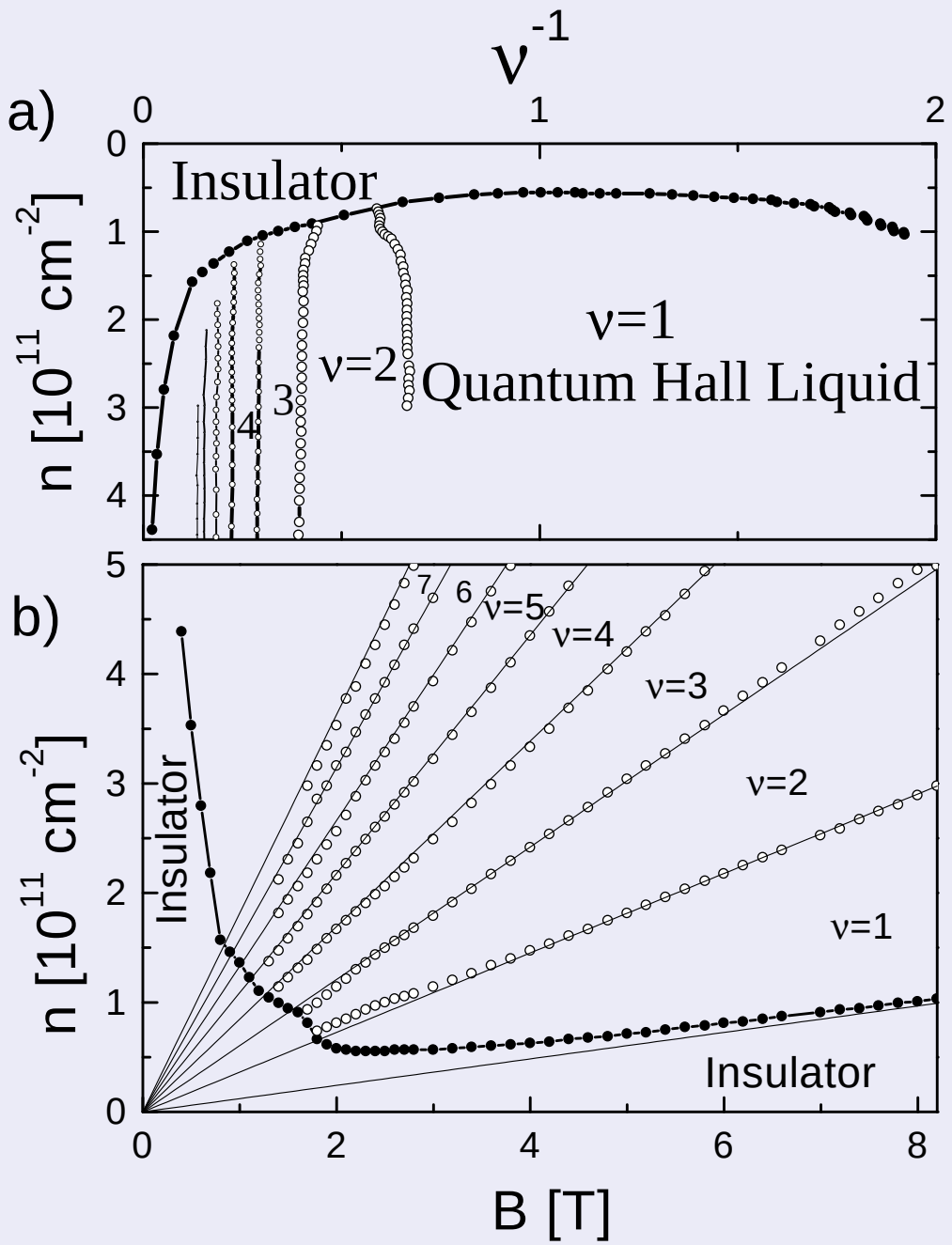
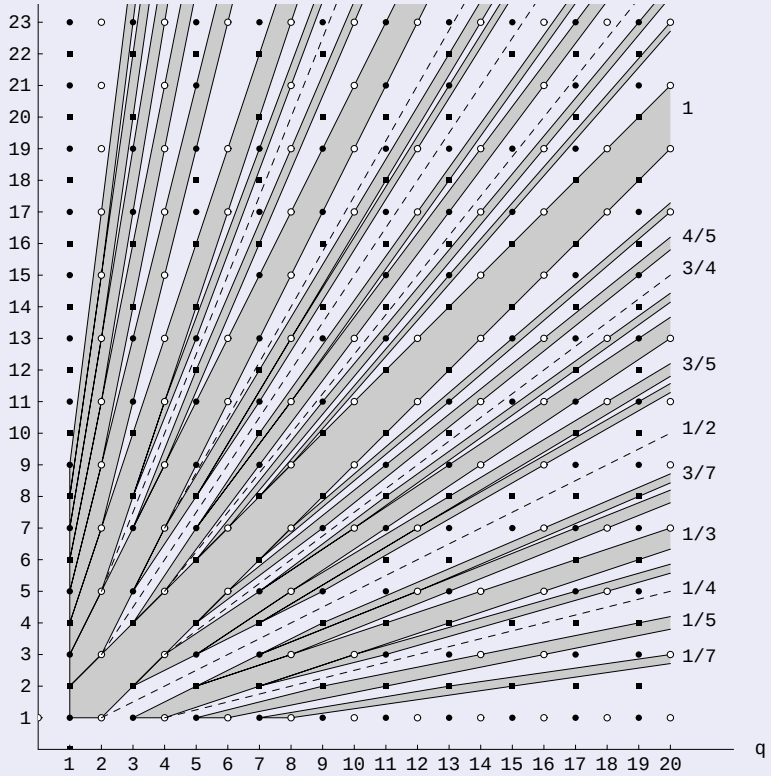
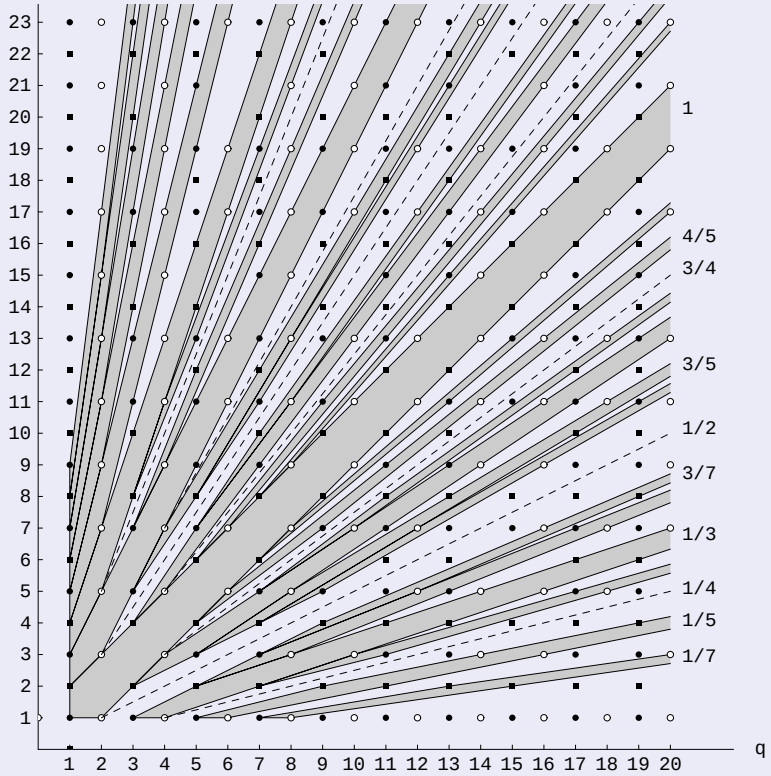


Diagramme des phases expérimental.

Le diagramme des phases prédit



Le diagramme des phases prédit



$$(q, p) \rightarrow (q/p, -p)$$

Le diagramme des phases prédit

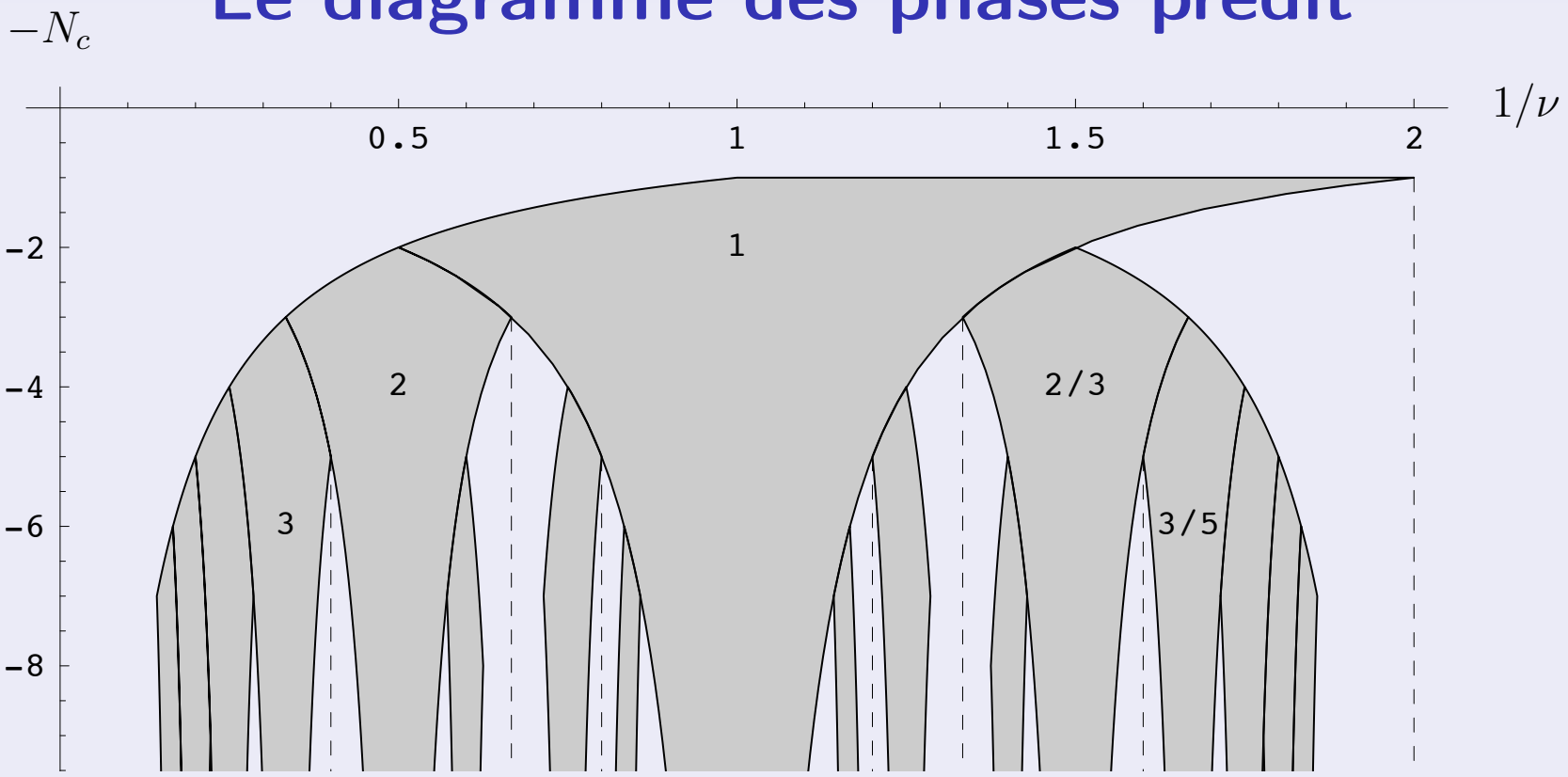
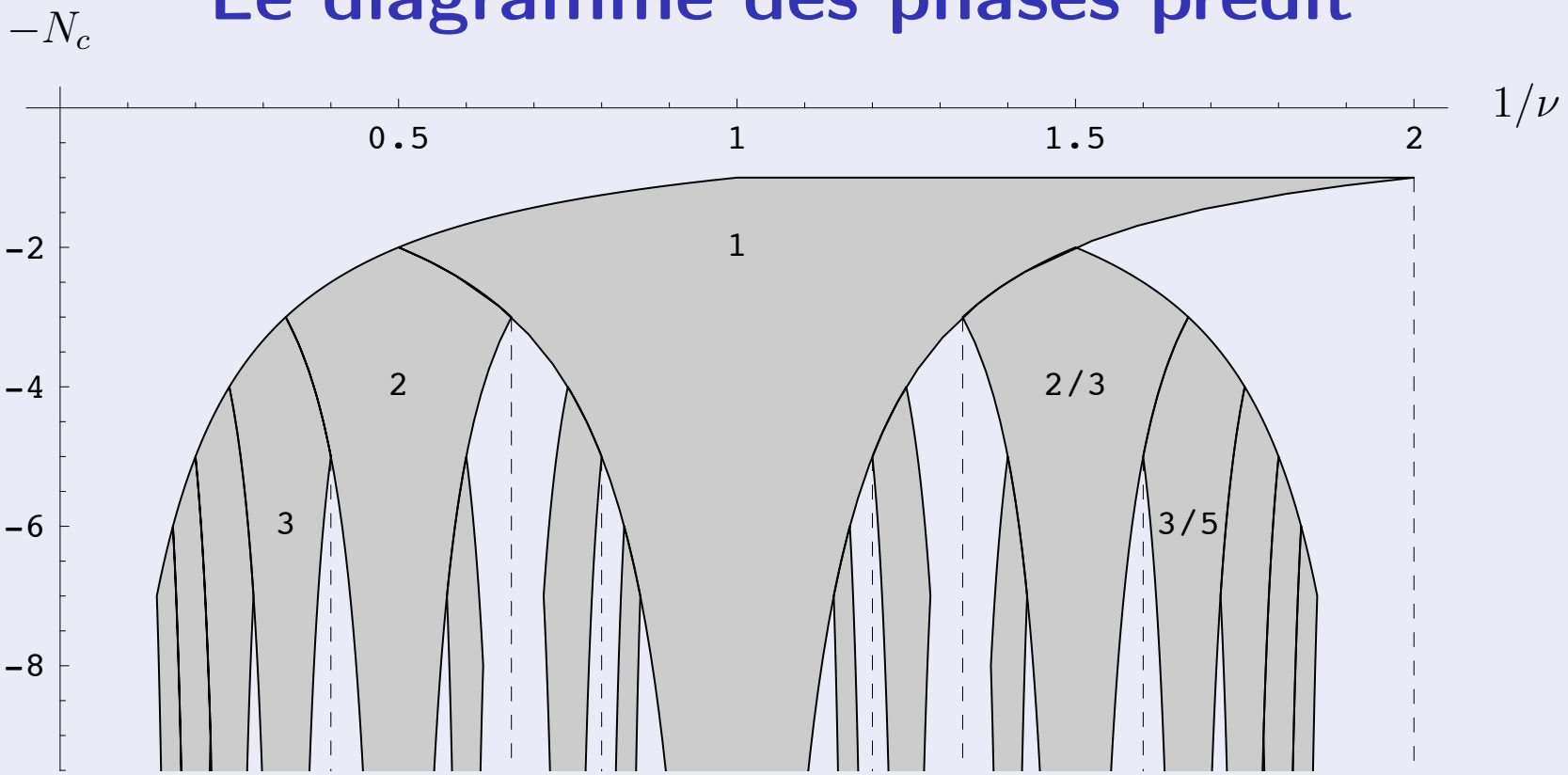
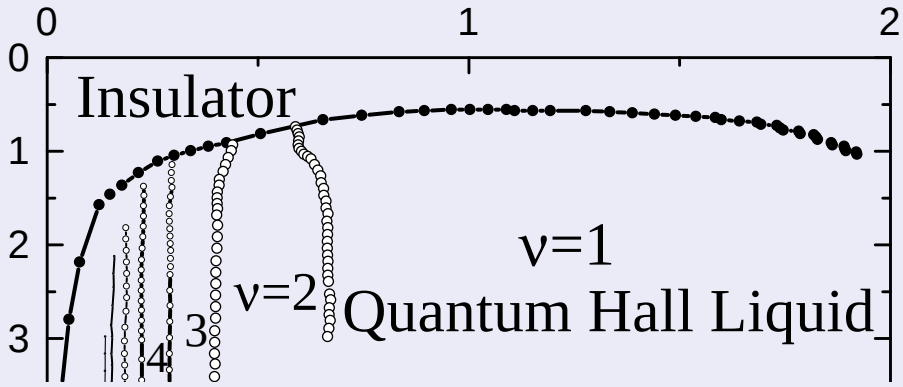


Diagramme des phases correspondant au diagramme des bandes.

Le diagramme des phases prédit

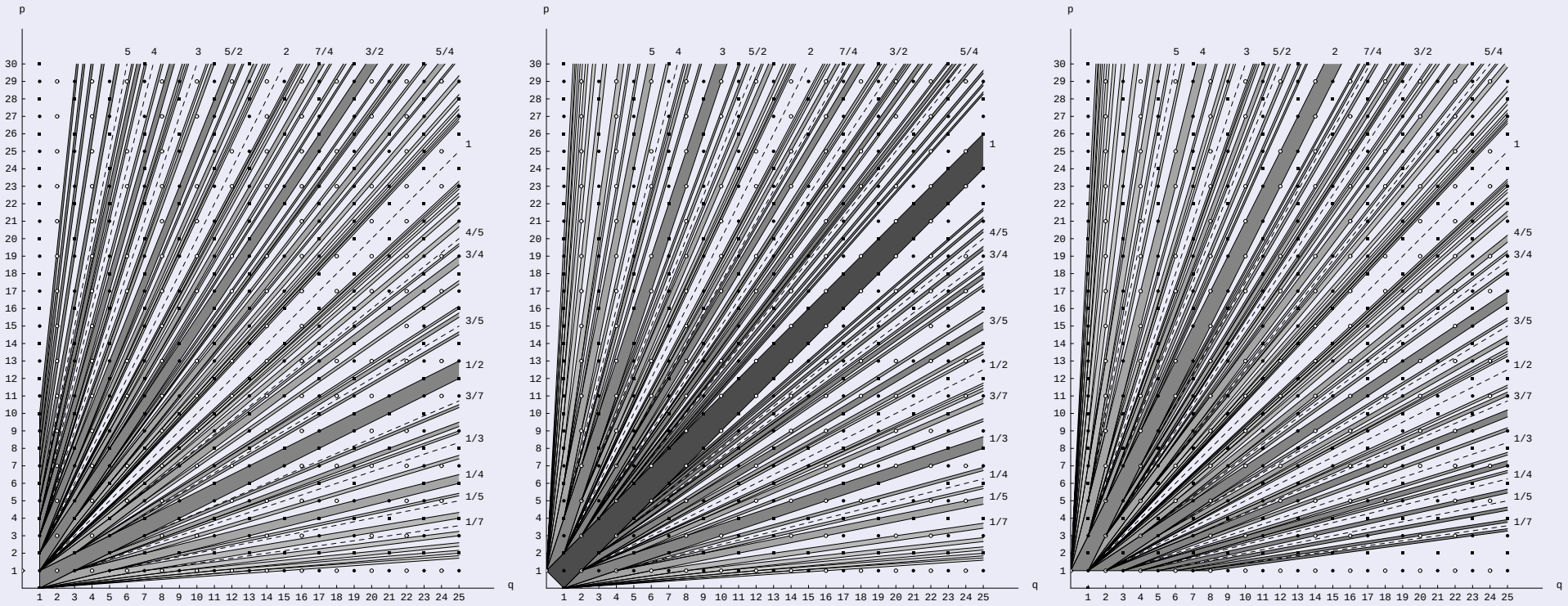


Prédiction



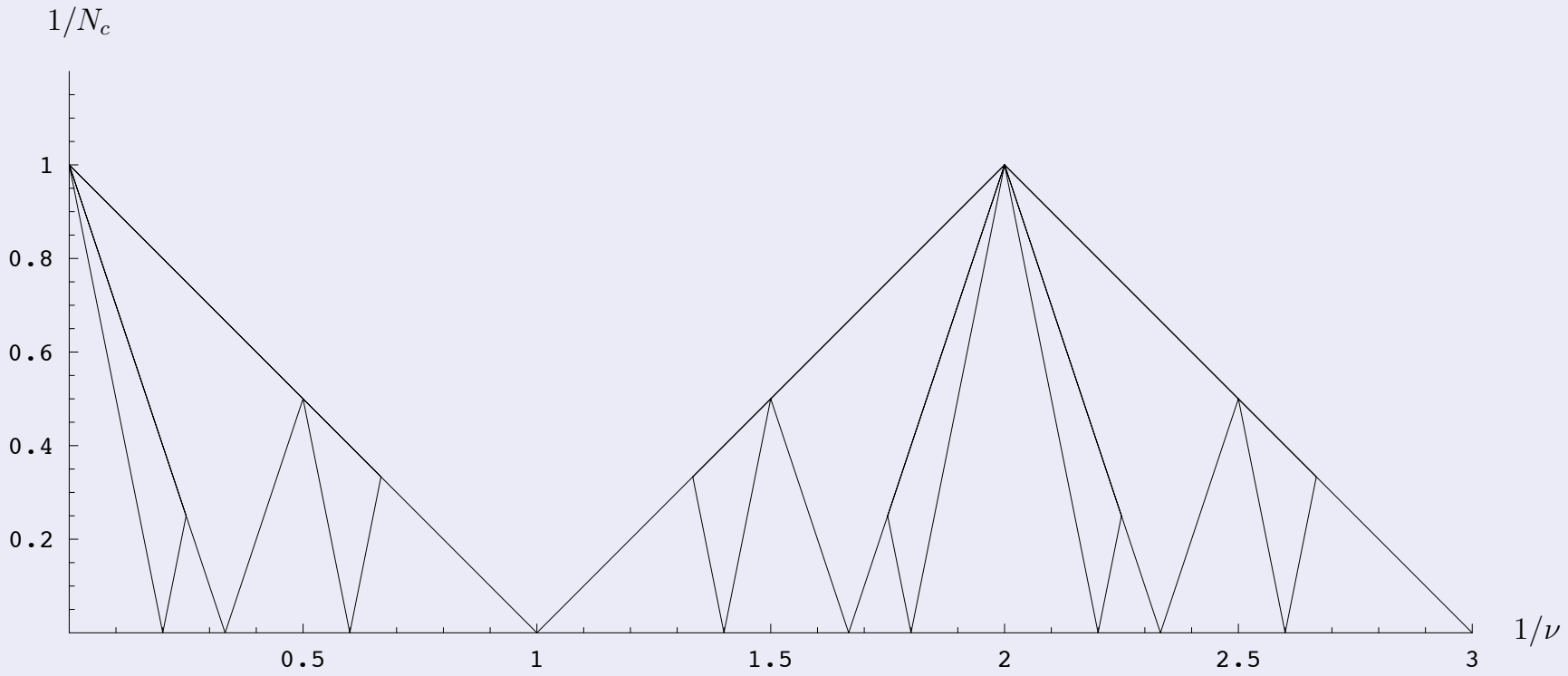
Expérience

Autre transformation des diagrammes des bandes



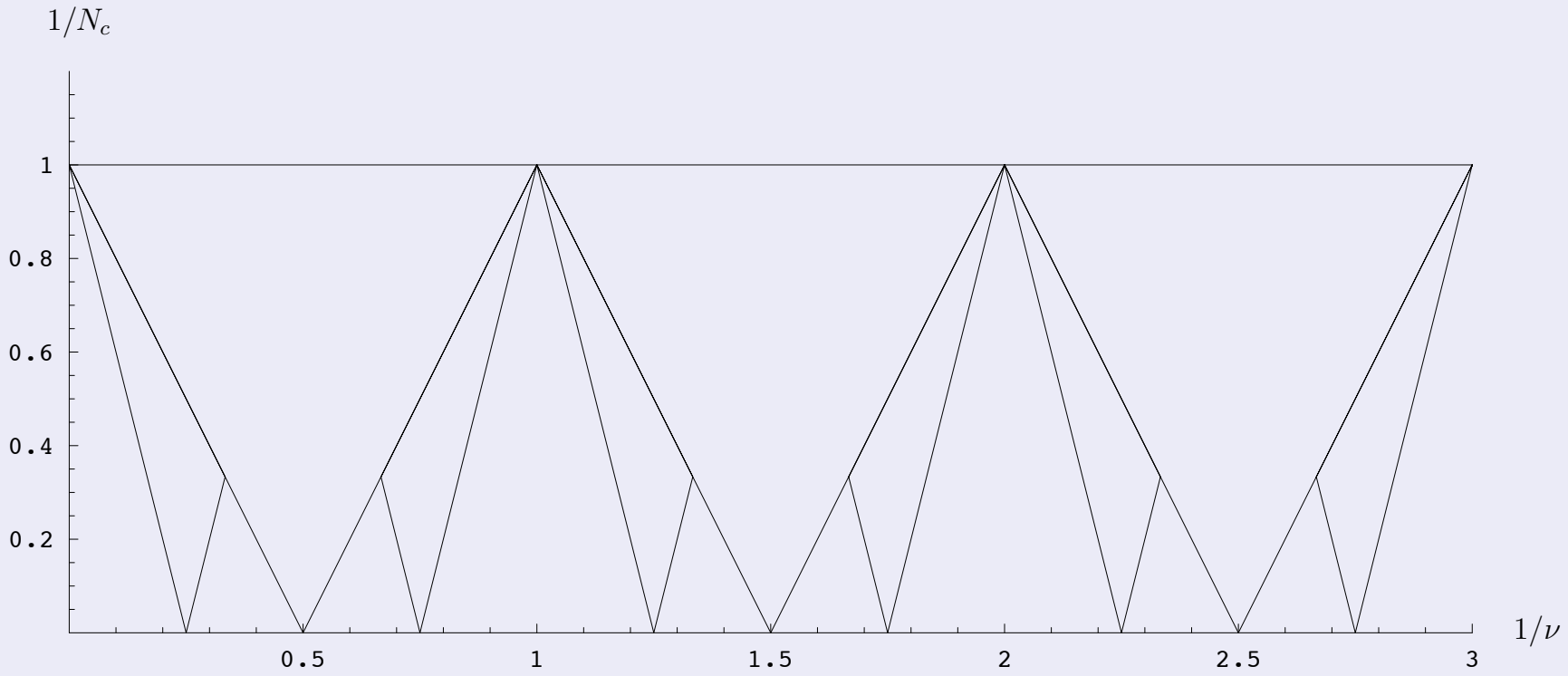
$$(q,p) \rightarrow (q/p, 1/p)$$

Autre transformation des diagrammes des bandes



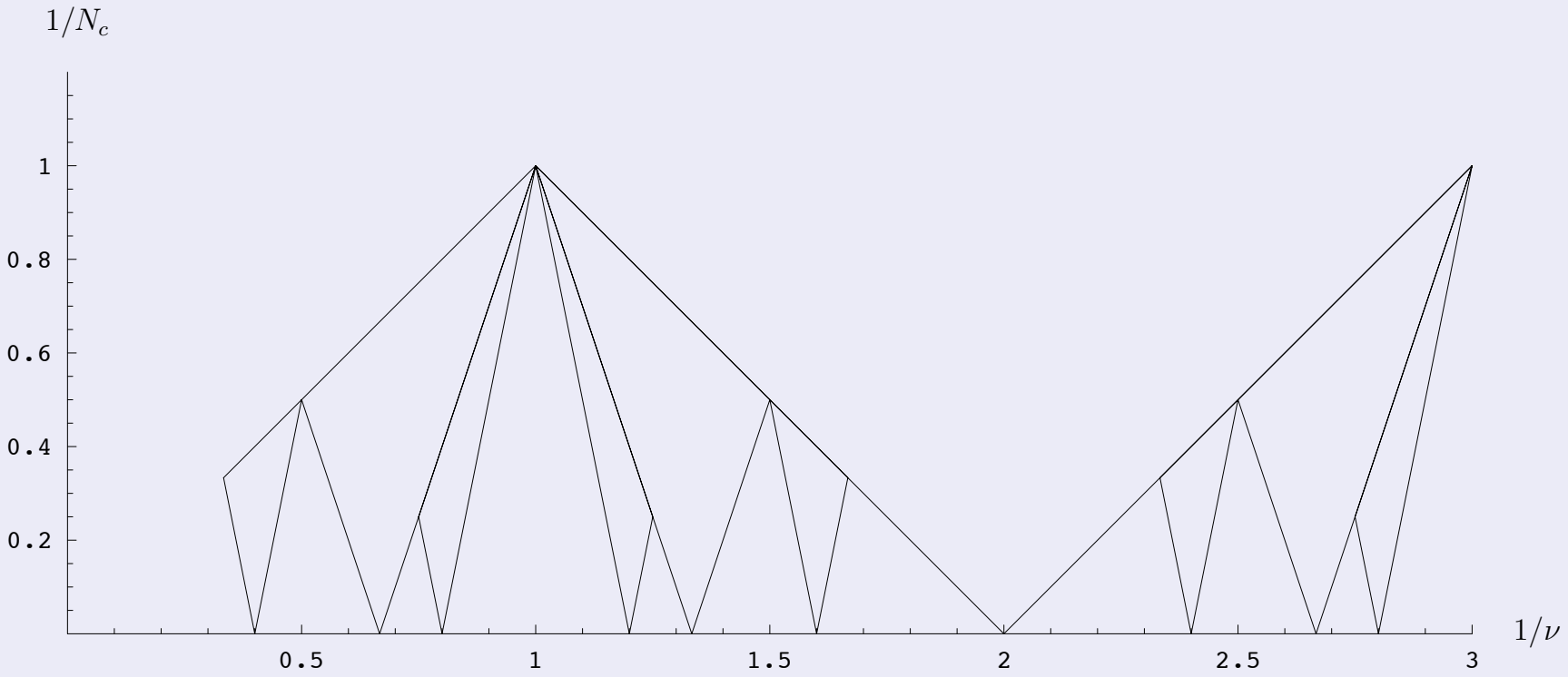
Triangles correspondants aux bandes des couples (q, p) pour q et p impairs.

Autre transformation des diagrammes des bandes



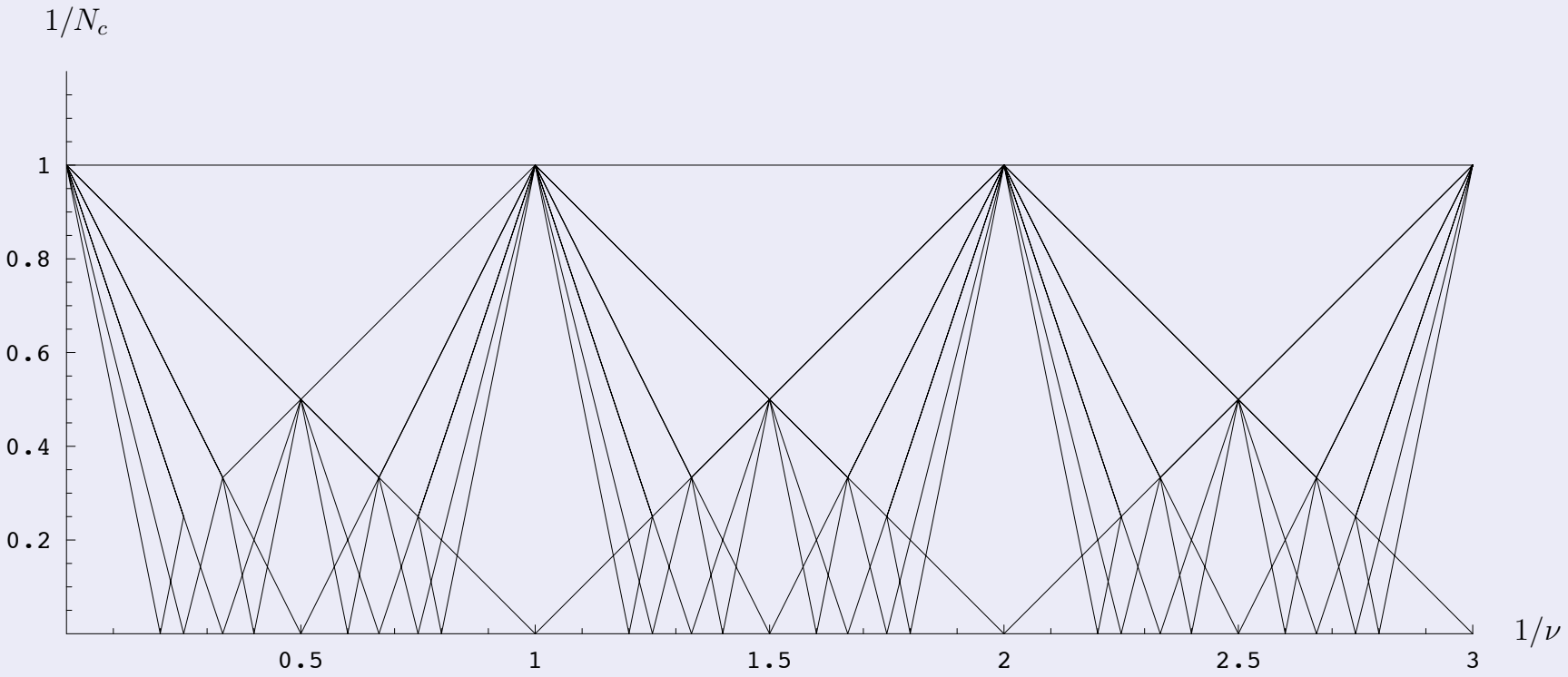
Triangles correspondants aux bandes des couples (q, p) pour q impair et p pair.

Autre transformation des diagrammes des bandes



Triangles correspondants aux bandes des couples (q, p) pour q pair et p impair.

Autre transformation des diagrammes des bandes



Trois diagrammes superposés.

Où l'on retrouve ce diagramme ailleurs !

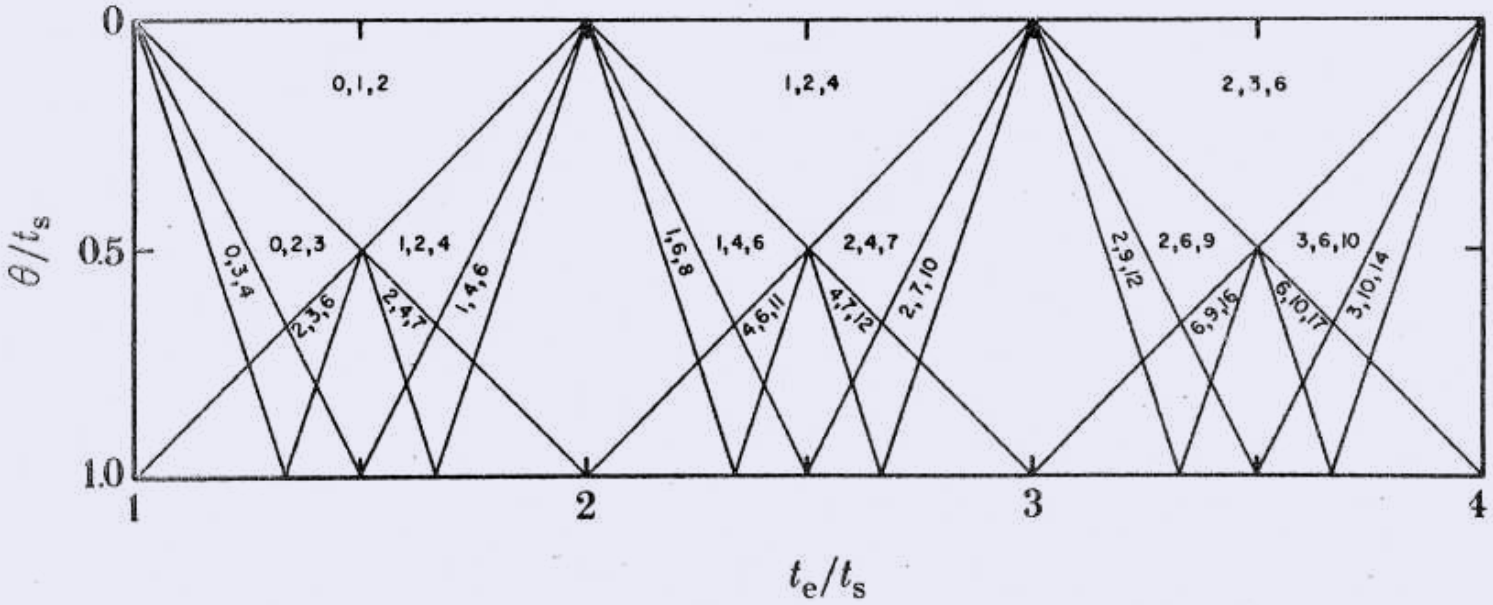


FIGURE 6. Allowed values for the number of sinus beats between ectopic beats for pure parasystole. Allowed values in the unlabelled regions can be determined from the construction described in Glass *et al.* (1986*a*). From Glass *et al.* (1986*a*).

Où l'on retrouve ce diagramme ailleurs !

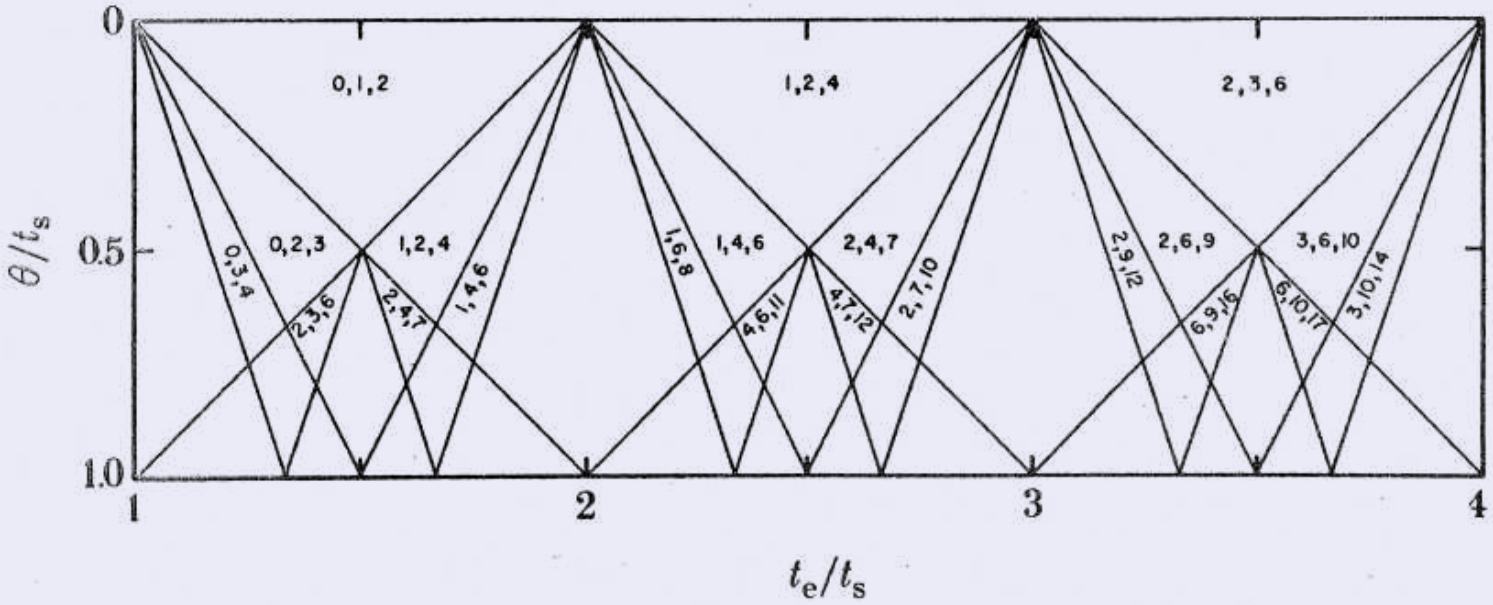


FIGURE 6. Allowed values for the number of sinus beats between ectopic beats for pure parasystole. Allowed values in the unlabelled regions can be determined from the construction described in Glass *et al.* (1986*a*). From Glass *et al.* (1986*a*).

Diagramme de phase proposé dans une étude de la parasystole du cœur.

Où l'on retrouve ce diagramme ailleurs !

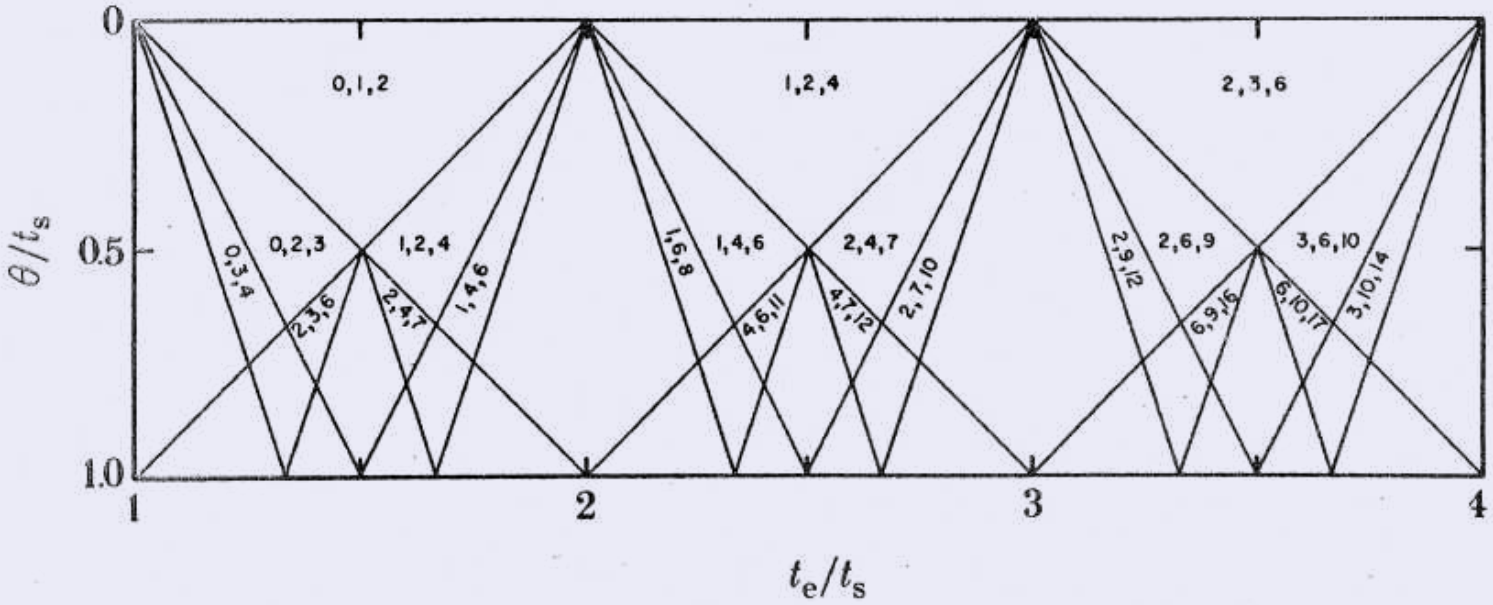


FIGURE 6. Allowed values for the number of sinus beats between ectopic beats for pure parasystole. Allowed values in the unlabelled regions can be determined from the construction described in Glass *et al.* (1986*a*). From Glass *et al.* (1986*a*).

Diagramme de phase proposé dans une étude de la parasystole du cœur.

Il est obtenu par un modèle qui se résume à un système dynamique. . .

Le système dynamique associé

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.

$$1000100000000100001000001\ldots$$

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
1000100000001000010000 1...

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 100010000000100001000001... on associe

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000000100001000001... on associe 3

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 10001000000010000100001... on associe 37

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000001000010000 1 ... on associe 374

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000001000010000 1... on associe 3744

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 100010000000100001000001... on associe 3744...

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000000100001000001... on associe 3744...

Théorème

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000001000010000 1 ... on associe 3744 ...

Théorème

1. *La suite réduite est composée de 3 entiers au maximum, $m \leq n \leq p$, avec $p = m + n$.*

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0,1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0,\alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0,\alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0,\alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000001000010000 1... on associe 3744...

Théorème

1. *La suite réduite est composée de 3 entiers au maximum, $m \leq n \leq p$, avec $p = m + n$.*
2. *Au moins un des entiers m, n est impair.*

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000000100001000001... on associe 3744...

Théorème

1. *La suite réduite est composée de 3 entiers au maximum, $m \leq n \leq p$, avec $p = m + n$.*
2. *Au moins un des entiers m, n est impair.*
3. *Une et une seule des trois valeurs m, n, p peut se succéder à elle même.*

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0,1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0,\alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0,\alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0,\alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000000100001000001... on associe 3744...

Théorème

1. *La suite réduite est composée de 3 entiers au maximum, $m \leq n \leq p$, avec $p = m + n$.*
2. *Au moins un des entiers m, n est impair.*
3. *Une et une seule des trois valeurs m, n, p peut se succéder à elle même.*

Le diagramme des phases de ce système dynamique consiste à dessiner les régions du plan (θ, α) pour lesquelles on a trois entiers fixés m, n, p.

Le système dynamique associé

Il s'agit d'un problème de commensurabilité...
Deux paramètres : $\alpha \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère la suite de nombres $\{r\theta\} \in [0, 1[$ (partie fractionnaire), pour $r \in \mathbb{N}$.
On se pose la question : pour quels entiers r a-t-on $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$?
Pour quels entiers r le réel $r\theta$ est-il proche d'un entier à l'erreur α près ?

On construit une suite de 0 et 1 : 1 si $\{r\theta\} \in [0, \alpha[$ et 0 si $\{r\theta\} \notin [0, \alpha[$.
On réduit cette liste à des entiers en comptant le nombre de 0 successifs.
À 1000100000000100001000001... on associe 3744...

Théorème

1. *La suite réduite est composée de 3 entiers au maximum, $m \leq n \leq p$, avec $p = m + n$.*
2. *Au moins un des entiers m, n est impair.*
3. *Une et une seule des trois valeurs m, n, p peut se succéder à elle même.*

Le diagramme des phases de ce système dynamique consiste à dessiner les régions du plan (θ, α) pour lesquelles on a trois entiers fixés m, n, p.
On note la périodicité 1 en θ.

Où l'on retrouve ce diagramme ailleurs !

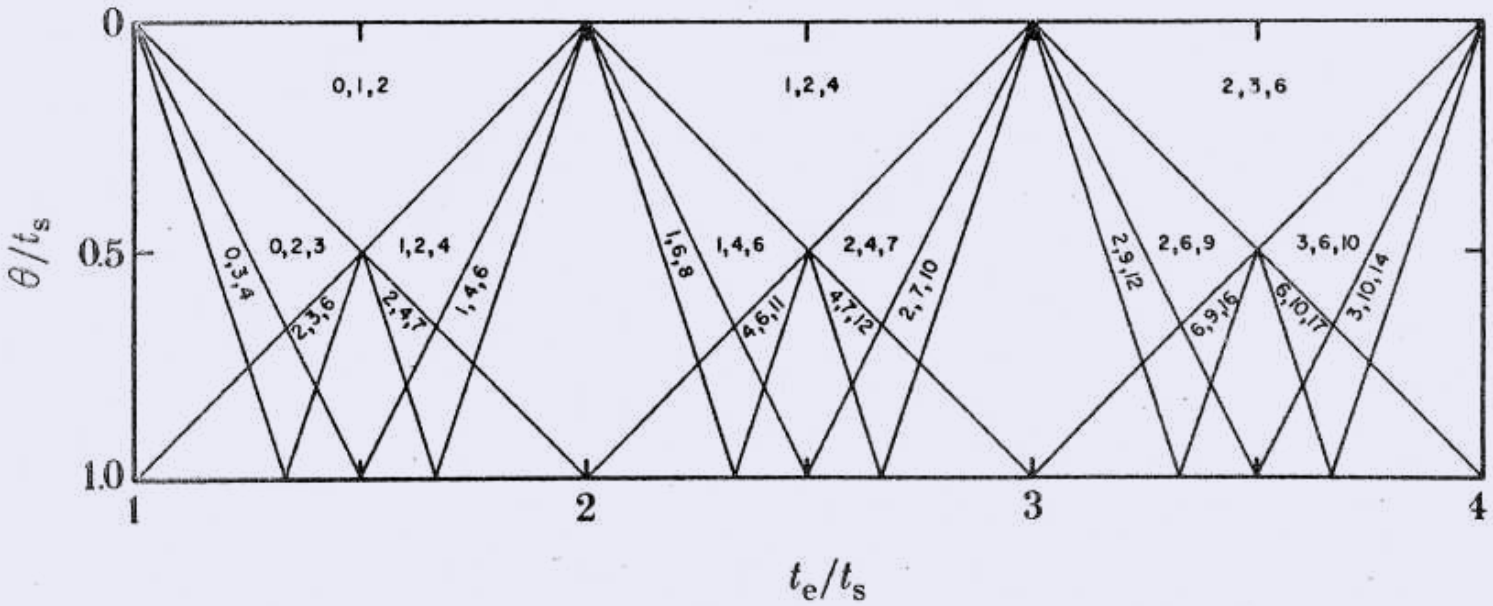
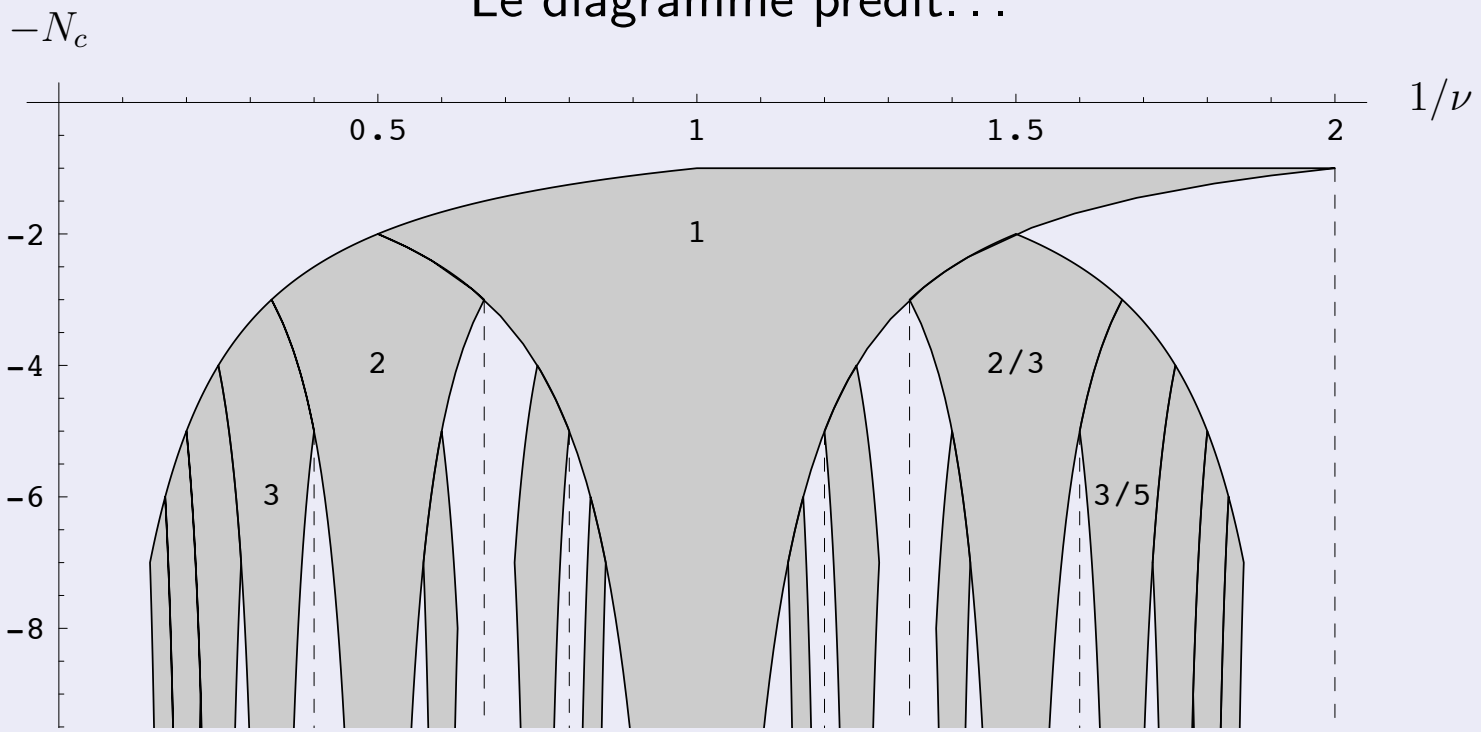


FIGURE 6. Allowed values for the number of sinus beats between ectopic beats for pure parasystole. Allowed values in the unlabelled regions can be determined from the construction described in Glass *et al.* (1986*a*). From Glass *et al.* (1986*a*).

Les trois entiers dans chaque phase correspondent aux trois entiers $m-1 \leq n-1 \leq p-1$.

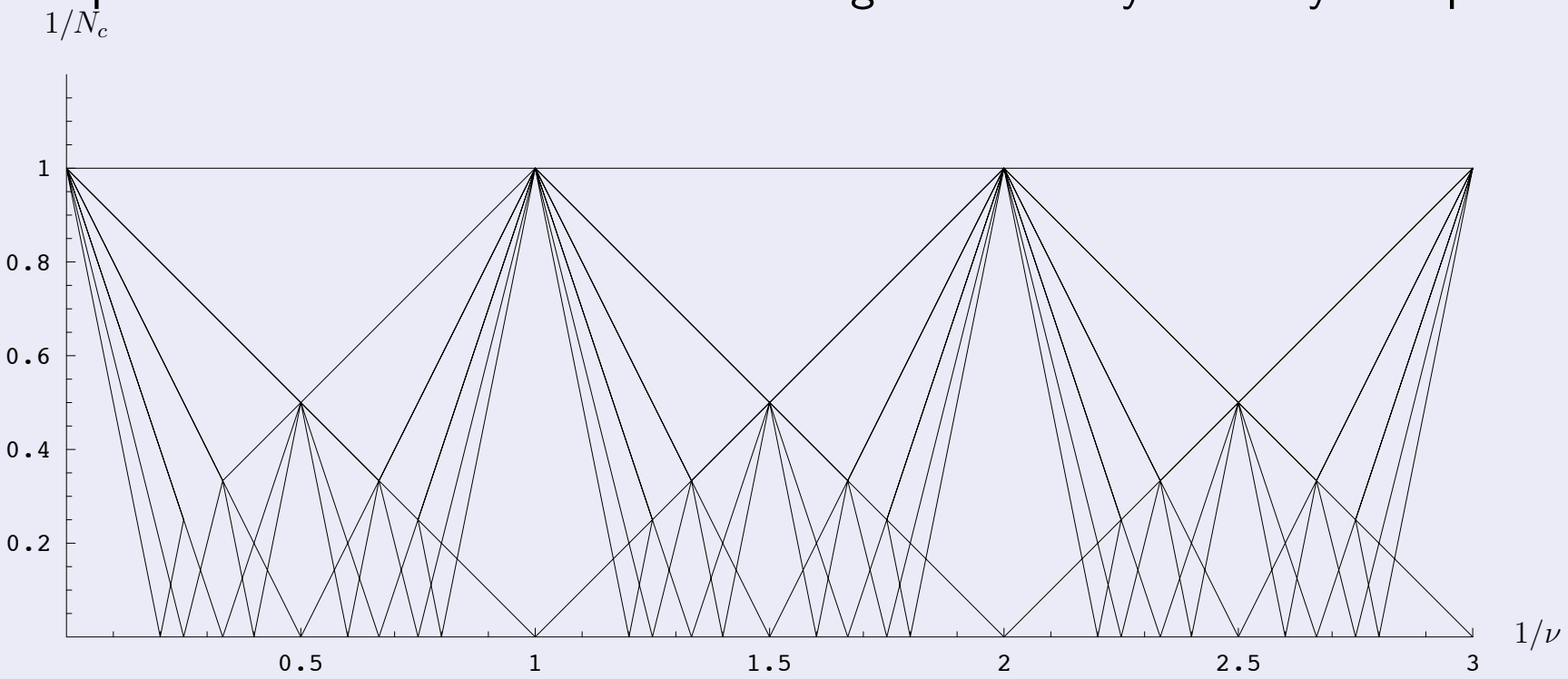
Interprétation du diagramme de l'effet Hall

Le diagramme prédit...



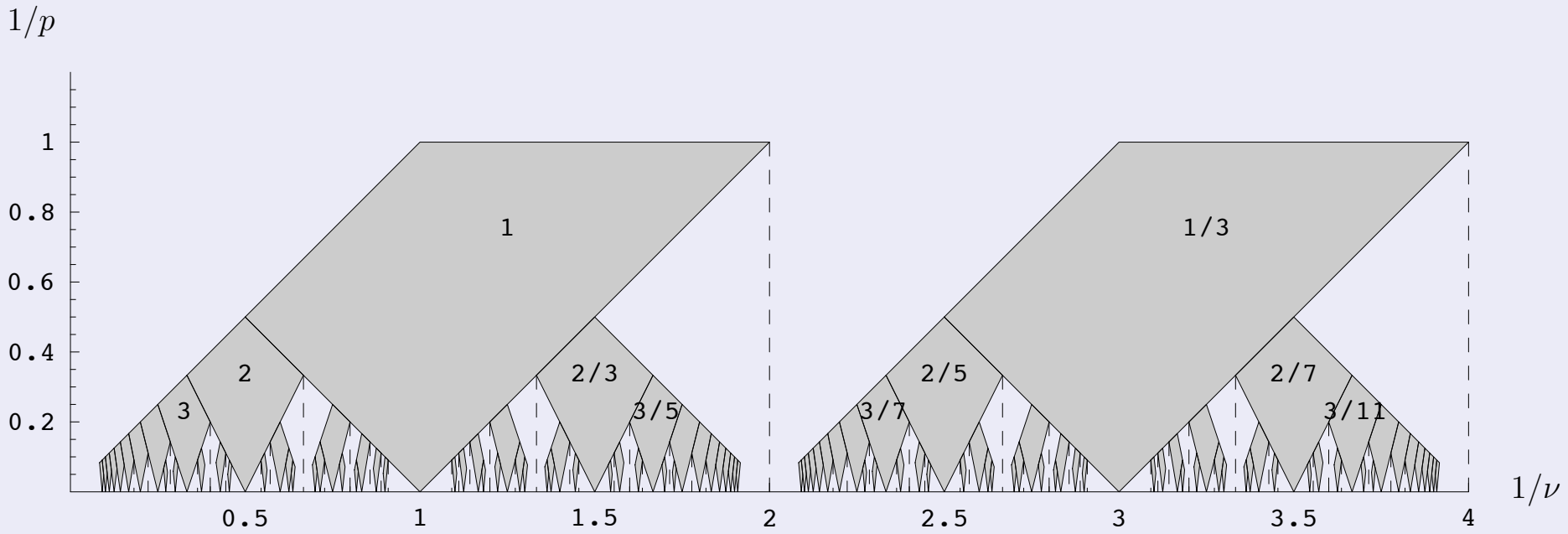
Interprétation du diagramme de l'effet Hall

. . . qu'on remet dans les variables du diagramme du système dynamique. . .

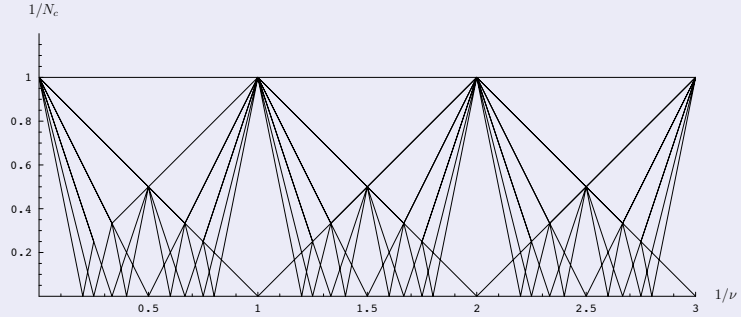


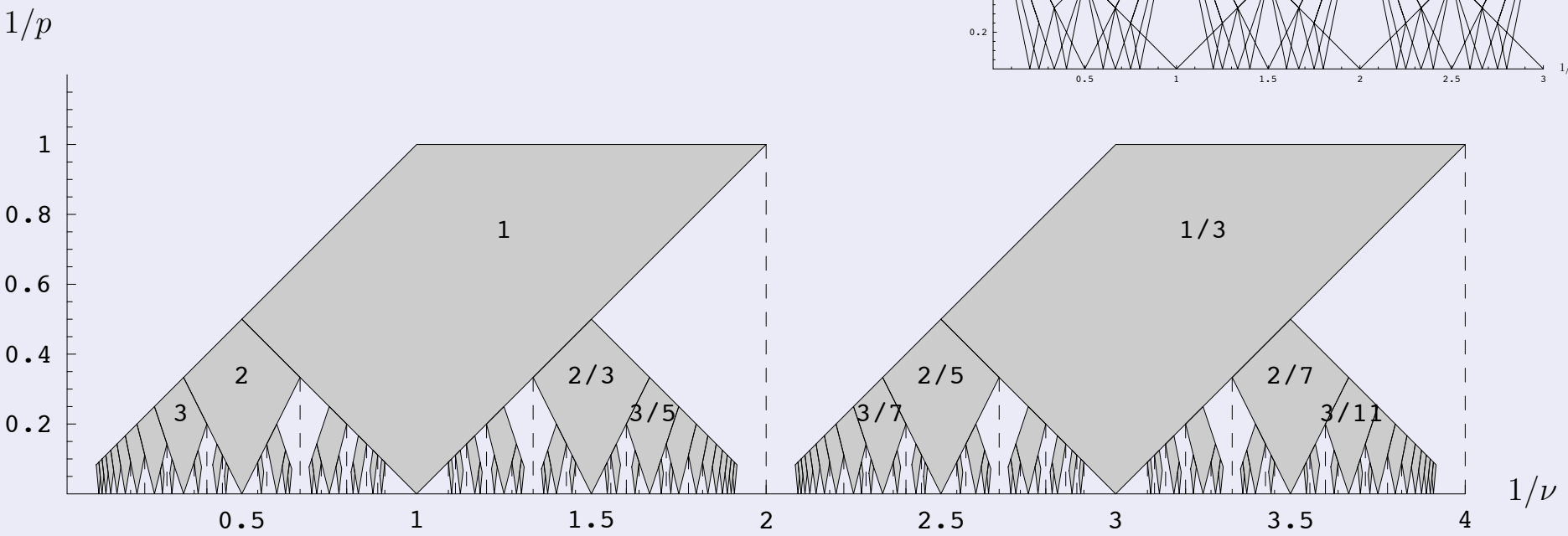
Interprétation du diagramme de l'effet Hall

. . . pour obtenir :



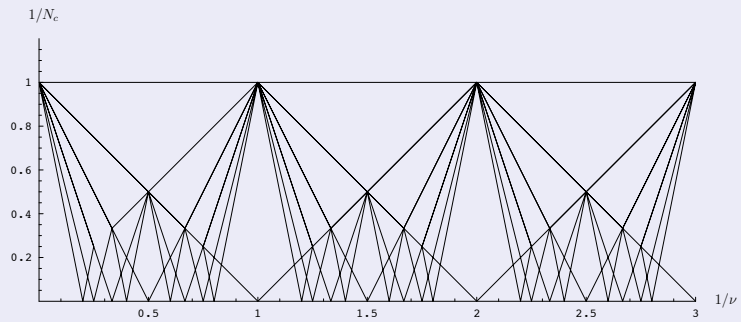
Interprétation du diagramme de l'effet Hall

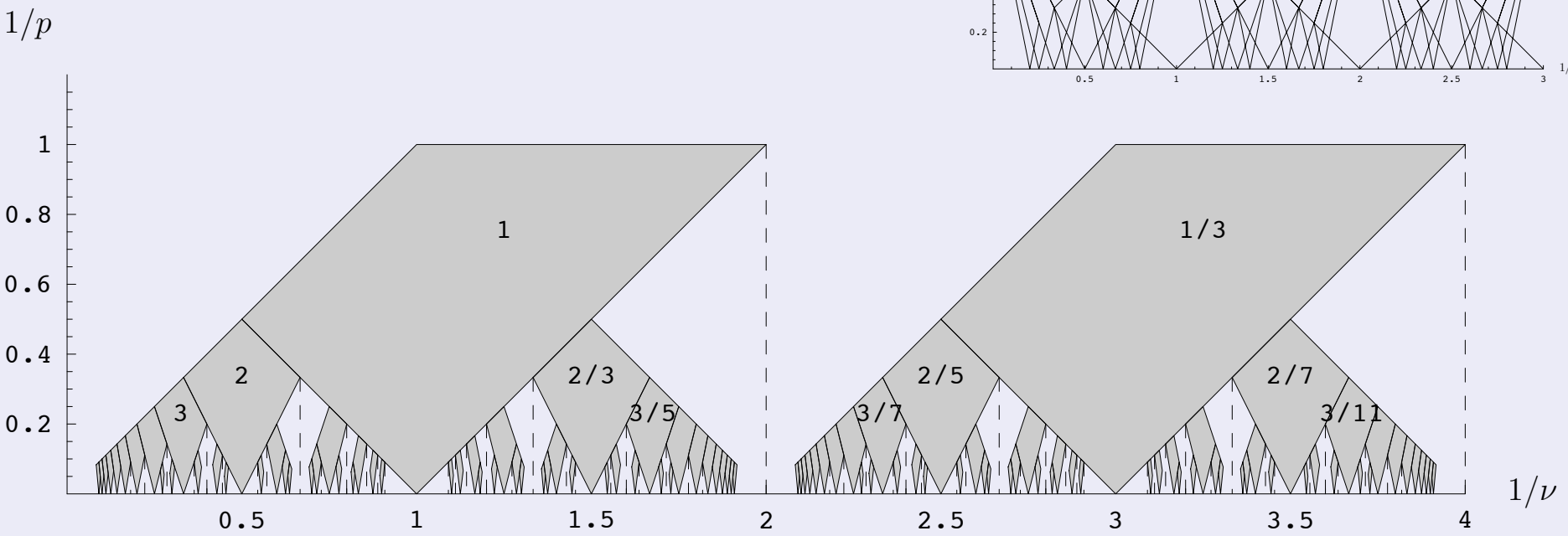




Les zones grises correspondent à des regroupements de toutes les phases ayant la même valeur de m (le plus petit des 3 entiers : $m \leq n \leq p$).

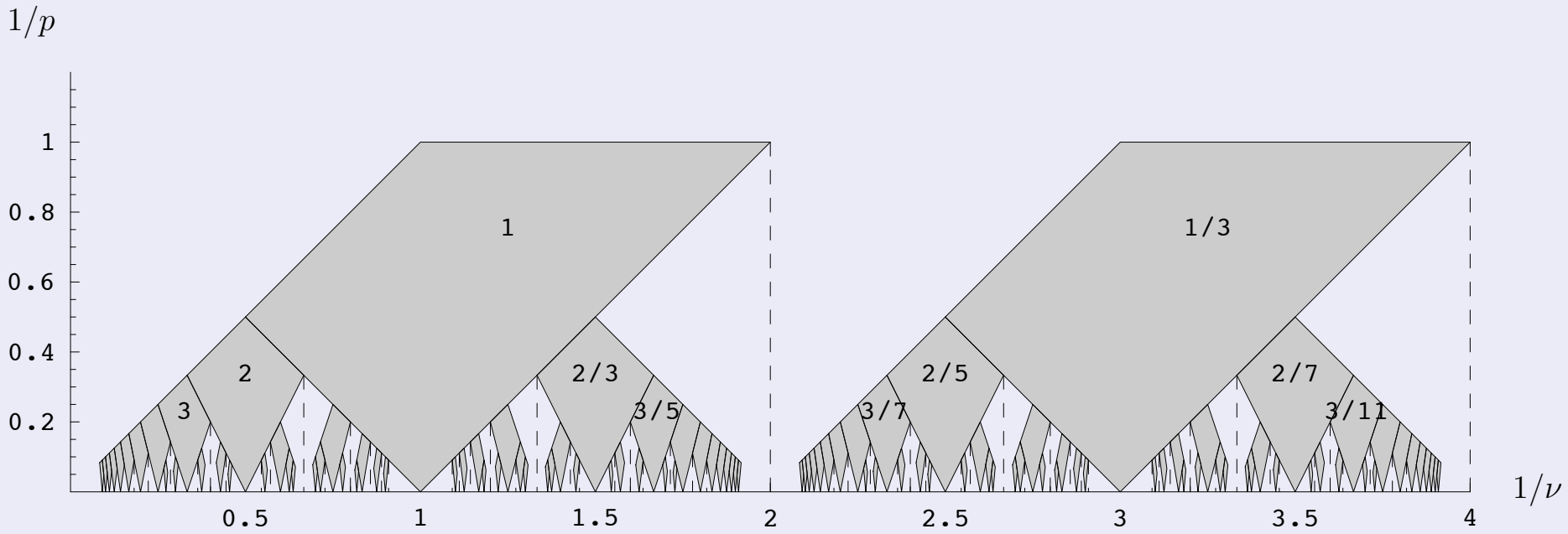
Interprétation du diagramme de l'effet Hall





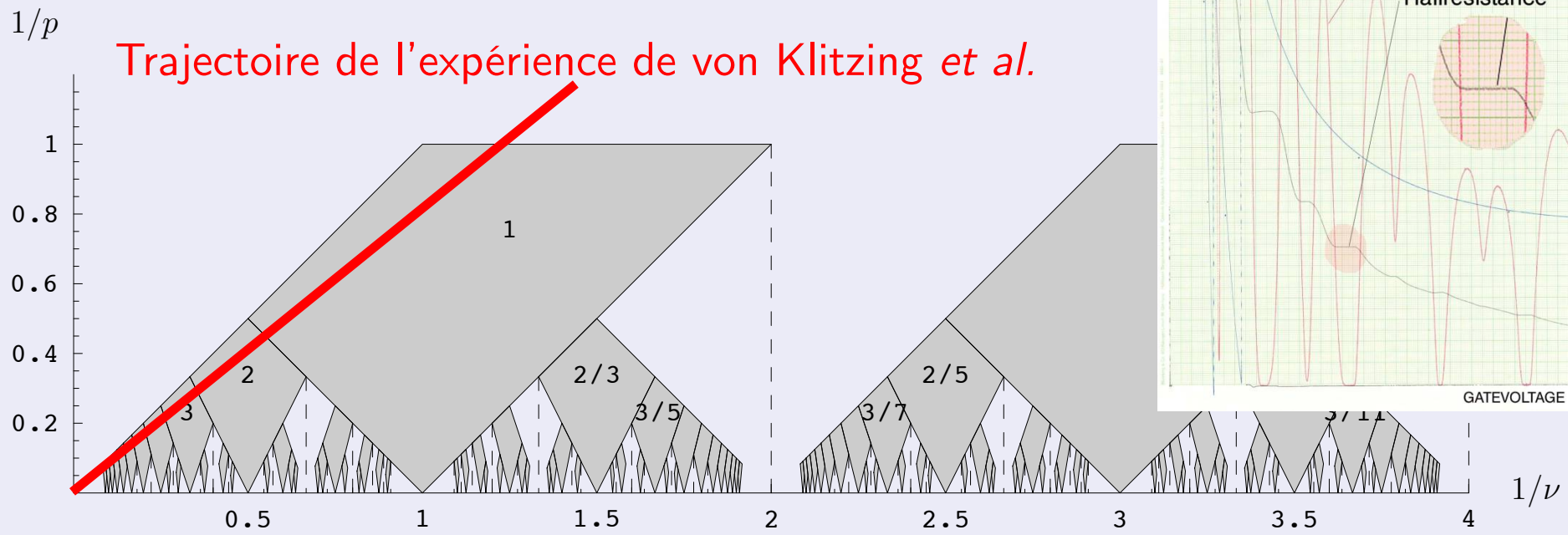
Les zones grises correspondent à des regroupements de toutes les phases ayant la même valeur de m (le plus petit des 3 entiers : $m \leq n \leq p$).
Problème de commensurabilité : la plus petite valeur de retour est dominante.

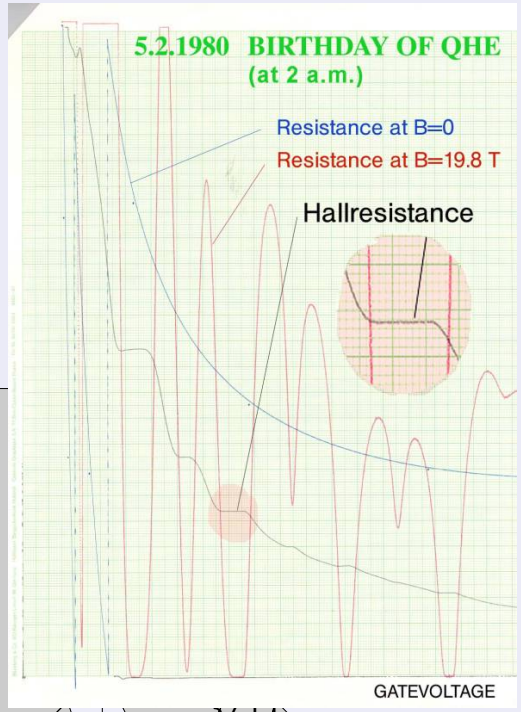
Interprétation du diagramme de l'effet Hall



Les zones grises correspondent à des regroupements de toutes les phases ayant la même valeur de m (le plus petit des 3 entiers : $m \leq n \leq p$).
Problème de commensurabilité : la plus petite valeur de retour est dominante.
Pas d'explication satisfaisante de ce fait pour l'instant !

Interprétation du diagramme de l'effet Hall





Les zones grises correspondent à des regroupements de toutes les phases ayant la même valeur de m (le plus petit des 3 entiers : $m \leq n \leq p$).
Problème de commensurabilité : la plus petite valeur de retour est dominante.
Pas d'explication satisfaisante de ce fait pour l'instant !

La mécanique quantique du problème

L'effet Hall Quantique

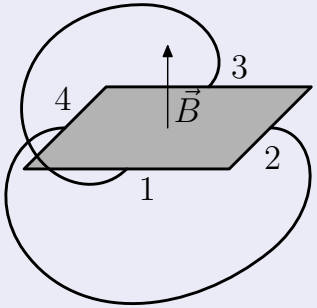
Les diagrammes de visibilité

Le diagramme des phases

La mécanique quantique du problème
- Les conditions aux bords
- Le système du centre de masse
- L'espace de Hilbert
- La formule de Kubo
- Espace direct, espace réciproque
- Géométrie de l'espace direct
- Problèmes et remèdes ?

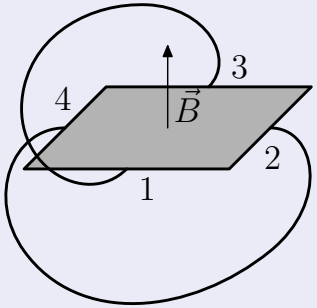
Les conditions aux bords

Géométrie de l'expérience :



Les conditions aux bords

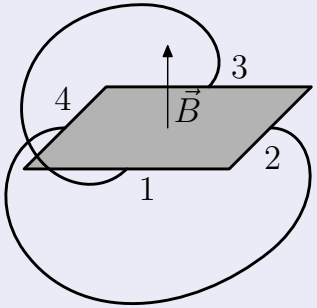
Géométrie de l'expérience :



Zone grise : basse température, champ magnétique

Les conditions aux bords

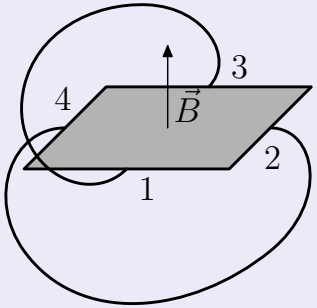
Géométrie de l'expérience :



Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.

Les conditions aux bords

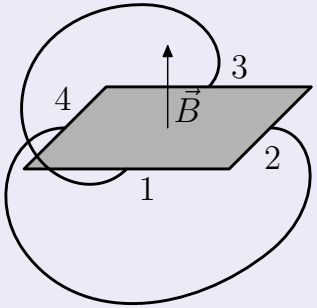
Géométrie de l'expérience :



Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments

Les conditions aux bords

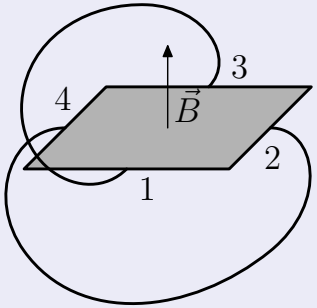
Géométrie de l'expérience :



Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments → mécanique classique.

Les conditions aux bords

Géométrie de l'expérience :

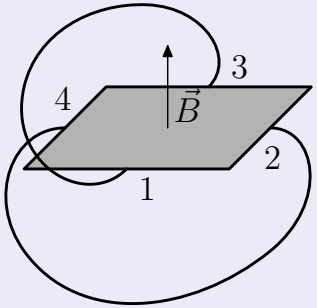


Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments → mécanique classique.

Il faut consilier les deux : mécanique quantique d'un système avec des conditions aux bords particulières.

Les conditions aux bords

Géométrie de l'expérience :

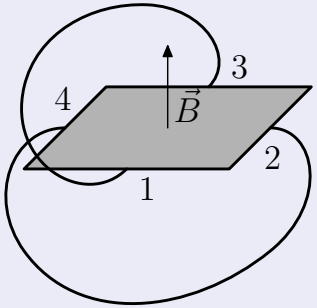


Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments → mécanique classique.

Il faut consilier les deux : mécanique quantique d'un système avec des conditions aux bords particulières.
Conservations des courants dans les fils : $j_1 + j_3 = 0$ et $j_2 + j_4 = 0$.

Les conditions aux bords

Géométrie de l'expérience :



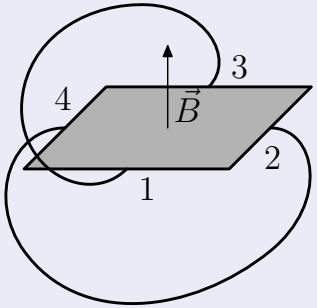
Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments → mécanique classique.

Il faut consilier les deux : mécanique quantique d'un système avec des conditions aux bords particulières.
Conservations des courants dans les fils : $j_1 + j_3 = 0$ et $j_2 + j_4 = 0$.
Hamiltonien du système de N porteurs de charge :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \left((p_{x_i} + \frac{1}{2} B y_i)^2 + (p_{y_i} - \frac{1}{2} B x_i)^2 \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i - x_j, y_i - y_j)$$

Les conditions aux bords

Géométrie de l'expérience :



Zone grise : basse température, champ magnétique → mécanique quantique.
Fils : température ambiante, instruments → mécanique classique.

Il faut consilier les deux : mécanique quantique d'un système avec des conditions aux bords particulières.
Conservations des courants dans les fils : $j_1 + j_3 = 0$ et $j_2 + j_4 = 0$.
Hamiltonien du système de N porteurs de charge :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m} \left((p_{x_i} + \frac{1}{2} B y_i)^2 + (p_{y_i} - \frac{1}{2} B x_i)^2 \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V(x_i - x_j, y_i - y_j)$$

Pour simplifier, on prend $x_i, y_i \in [0, 1]$.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

- variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
- hamiltonien : $H = H_0 + H_I$

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

- variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
- hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

- variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
- hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

- variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
- hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

- espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

- variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
- hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

- espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$

→ hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

→ espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.

Tout ce qui nous intéresse est dans la partie $\mathcal{H}_0$.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$

→ hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

→ espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.

Tout ce qui nous intéresse est dans la partie $\mathcal{H}_0$.

Ne pas croire que la partie $\mathcal{H}_I$ ne joue aucun rôle !

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse

→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$

→ hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.

→ espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.

Tout ce qui nous intéresse est dans la partie $\mathcal{H}_0$.

Ne pas croire que la partie $\mathcal{H}_I$ ne joue aucun rôle !

- H_I modifie le spectre d'énergie de H.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse
→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
→ hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.
→ espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.
Tout ce qui nous intéresse est dans la partie $\mathcal{H}_0$.

Ne pas croire que la partie $\mathcal{H}_I$ ne joue aucun rôle !

- H_I modifie le spectre d'énergie de H.
- Scinde les niveaux d'énergie de Landau.

Le système du centre de masse

On se place dans le système du centre de masse
→ variables : $x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,\ y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i,\ p_x = \sum_{i=1}^{N} p_{x_i},\ p_y = \sum_{i=1}^{N} p_{y_i}$
→ hamiltonien : $H = H_0 + H_I$ où

$$H_0 = \frac{1}{2Nm}\left((p_x + \frac{1}{2}NBy)^2 + (p_y - \frac{1}{2}NBx)^2\right)$$

et H_I est l'hamiltonien des degrés de liberté internes.
→ espace de Hilbert : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_I$, avec $\mathcal{H}_0 = L^2([0,1]\times[0,1])$.
Tout ce qui nous intéresse est dans la partie $\mathcal{H}_0$.

Ne pas croire que la partie $\mathcal{H}_I$ ne joue aucun rôle !

- H_I modifie le spectre d'énergie de H.
- Scinde les niveaux d'énergie de Landau.
- Pour calculer la conductance, on utilise la formule de Kubo dans laquelle l'hypothèse d'un gap est essentielle.

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.
→ trouver le domaine dense compatible avec les conditions aux bords.

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.
→ trouver le domaine dense compatible avec les conditions aux bords.
Cas à une dimension bien connu, exposé dans tous les livres (sérieux) de mécanique quantique.

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.
→ trouver le domaine dense compatible avec les conditions aux bords.
Cas à une dimension bien connu, exposé dans tous les livres (sérieux) de mécanique quantique.

Solution basée sur un Ansatz : $\mathcal{D}_{\gamma,\eta}$ pour $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$.

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.
→ trouver le domaine dense compatible avec les conditions aux bords.
Cas à une dimension bien connu, exposé dans tous les livres (sérieux) de mécanique quantique.

Solution basée sur un Ansatz : $\mathcal{D}_{\gamma,\eta}$ pour $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$.
$\phi \in \mathcal{D}_{\gamma,\eta}$, suffisamment différentiable et telle que

$$\phi(1,y) = e^{i\gamma + \frac{i}{2}NBy}\phi(0,y) \quad ; \quad \phi(x,1) = e^{i\eta - i\frac{i}{2}NBx}\phi(x,0)$$

L'espace de Hilbert

Dans $\mathcal{H}_0$ on s'intéresse aux opérateurs

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}NBy \quad ; \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}NBx$$

opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$, autoadjoints.
→ trouver le domaine dense compatible avec les conditions aux bords.
Cas à une dimension bien connu, exposé dans tous les livres (sérieux) de mécanique quantique.

Solution basée sur un Ansatz : $\mathcal{D}_{\gamma,\eta}$ pour $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$.
$\phi \in \mathcal{D}_{\gamma,\eta}$, suffisamment différentiable et telle que

$$\phi(1,y) = e^{i\gamma + \frac{i}{2}NBy}\phi(0,y) \quad ; \quad \phi(x,1) = e^{i\eta - i\frac{i}{2}NBx}\phi(x,0)$$

γ,η restreints à $[0,2\pi]$, mais on travaille avec γ,η dans $\mathbb{R}$.

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

Domaine de P_x et P_y

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

Domaine de P_x et P_y : $\widetilde{\mathcal{D}} \subset L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$, fonctions régulières

$$(x,y,\gamma,\eta) \mapsto \psi(x,y,\gamma,\eta)$$

$$\psi(1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(0,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \psi(x,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,0,\gamma,\eta)$$

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

Domaine de P_x et P_y : $\widetilde{\mathcal{D}} \subset L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$, fonctions régulières

$$(x,y,\gamma,\eta) \mapsto \psi(x,y,\gamma,\eta)$$

$$\psi(1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(0,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \psi(x,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,0,\gamma,\eta)$$

Autre façon de faire : reporter la dépendance en (γ,η) sur les opérateurs.

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

Domaine de P_x et P_y : $\widetilde{\mathcal{D}} \subset L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$, fonctions régulières

$$(x,y,\gamma,\eta) \mapsto \psi(x,y,\gamma,\eta)$$

$$\psi(1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(0,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \psi(x,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,0,\gamma,\eta)$$

Autre façon de faire : reporter la dépendance en (γ,η) sur les opérateurs.

$$\widetilde{\psi}(x,y,\gamma,\eta) = e^{-i(\gamma x+\eta y)}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \widetilde{P}_x = P_x + \gamma \quad ; \quad \widetilde{P}_y = P_y + \eta$$

L'espace de Hilbert

Il faut considérer toutes les conditions aux bords en même temps.
L'espace de Hilbert est somme directe des espaces de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ pour toutes les valeurs de $(\gamma,\eta) \in [0,2\pi]^2$ (somme directe hilbertienne) :

$$L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$$

Domaine de P_x et P_y : $\widetilde{\mathcal{D}} \subset L^2([0,1]^2 \times [0,2\pi]^2)$, fonctions régulières

$$(x,y,\gamma,\eta) \mapsto \psi(x,y,\gamma,\eta)$$

$$\psi(1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(0,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \psi(x,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,0,\gamma,\eta)$$

Autre façon de faire : reporter la dépendance en (γ,η) sur les opérateurs.

$$\widetilde{\psi}(x,y,\gamma,\eta) = e^{-i(\gamma x+\eta y)}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \widetilde{P}_x = P_x + \gamma \quad ; \quad \widetilde{P}_y = P_y + \eta$$

$$\widetilde{\psi}(1,y,\gamma,\eta) = e^{+\frac{i}{2}NBy}\widetilde{\psi}(0,y,\gamma,\eta) \quad ; \quad \widetilde{\psi}(x,1,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}NBx}\widetilde{\psi}(x,0,\gamma,\eta)$$

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H.

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

$$\sigma_H = \frac{N^2}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dx dy \left(\frac{\partial \widetilde{\psi}^*}{\partial \gamma} \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \eta} - \frac{\partial \widetilde{\psi}^*}{\partial \eta} \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \gamma} \right)$$

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta} - \frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\eta}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}\right)\\ &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \; dA\end{aligned}$$

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta} - \frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\eta}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}\right)\\ &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \; dA\end{aligned}$$

où

$$A = \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}d\gamma + \widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta}d\eta\right) \; .$$

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta} - \frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\eta}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}\right)\\ &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta\ dA\end{aligned}$$

où

$$A = \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}d\gamma + \widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta}d\eta\right) .$$

→ première classe de Chern d'un fibré en droites (complexes) sur le tore $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$.

La formule de Kubo

On cherche à calculer σ_H. On utilise la formule de Kubo :

$$\sigma_H = i \sum_{n>0} \frac{(v_y)_{0n}(v_x)_{n0} - (v_x)_{0n}(v_y)_{n0}}{(E_0 - E_n)^2}$$

v_x, v_x opérateurs vitesse (proportionnel à P_x et P_y), $(v_x)_{n0}$ valeur moyenne.

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta} - \frac{\partial\widetilde{\psi}^*}{\partial\eta}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}\right)\\ &= \frac{N^2}{2\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]^2} d\gamma d\eta \; dA\end{aligned}$$

où

$$A = \int_{[0,1]^2} dxdy \left(\widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\gamma}d\gamma + \widetilde{\psi}^*\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta}d\eta\right) \quad .$$

→ première classe de Chern d'un fibré en droites (complexes) sur le tore $(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$. σ_H reliée à un invariant topologique !

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces :

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - Les paramètres supplémentaires viennent de la structure crystallographique de l'échantillon, supposé infini.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - Les paramètres supplémentaires viennent de la structure crystallographique de l'échantillon, supposé infini.
  - Paramétrisation des fonctions de Bloch généralisées.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - Les paramètres supplémentaires viennent de la structure crystallographique de l'échantillon, supposé infini.
  - Paramétrisation des fonctions de Bloch généralisées.
  - Restreints à une zone magnétique de Brillouin.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - Les paramètres supplémentaires viennent de la structure crystallographique de l'échantillon, supposé infini.
  - Paramétrisation des fonctions de Bloch généralisées.
  - Restreints à une zone magnétique de Brillouin.
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - Les paramètres supplémentaires viennent de la structure crystallographique de l'échantillon, supposé infini.
  - Paramétrisation des fonctions de Bloch généralisées.
  - Restreints à une zone magnétique de Brillouin.
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

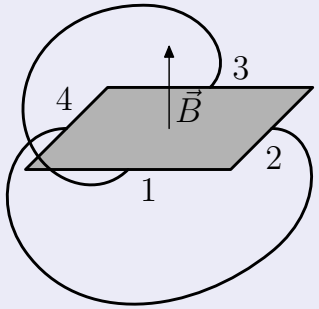
- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.

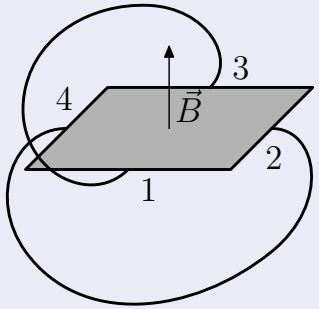


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.

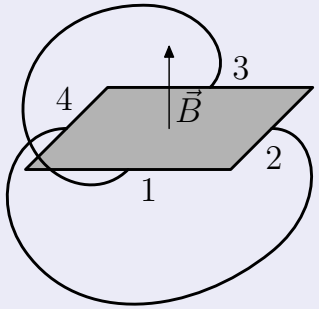


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.
  - L'un impose un champs électrique dans l'échantillon.

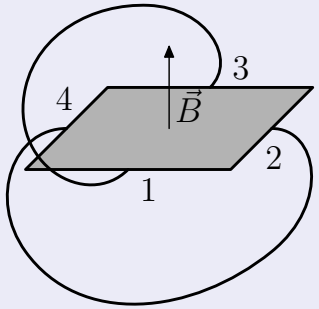


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.
  - L'un impose un champs électrique dans l'échantillon.
  - L'autre mesure la réponse du système.

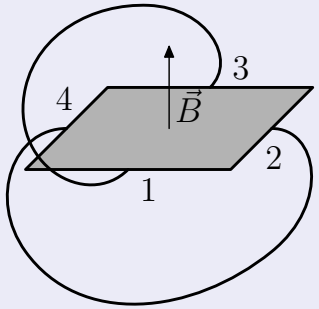


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.
  - L'un impose un champs électrique dans l'échantillon.
  - L'autre mesure la réponse du système.
  - Restreints à $[0, 2\pi]^2$ par une transformation de jauge.

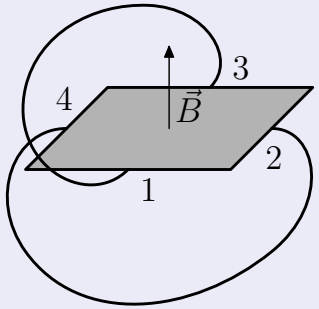


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.
  - L'un impose un champs électrique dans l'échantillon.
  - L'autre mesure la réponse du système.
  - Restreints à $[0, 2\pi]^2$ par une transformation de jauge.
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.

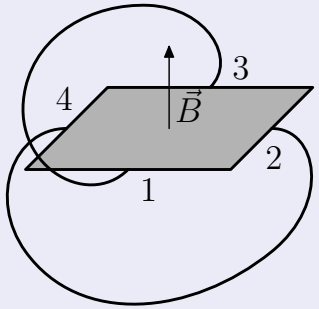


Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux flux à travers les deux fils.
  - L'un impose un champs électrique dans l'échantillon.
  - L'autre mesure la réponse du système.
  - Restreints à $[0, 2\pi]^2$ par une transformation de jauge.
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.



Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux phases dans les conditions aux bords des fonctions d'onde.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux phases dans les conditions aux bords des fonctions d'onde.
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - Géométrie de l'échantillon comme ici.
  - Les paramètres supplémentaires sont reliés aux phases dans les conditions aux bords des fonctions d'onde.
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.

Dans tous ces cas, cette classe de Chern n'a jamais pu être calculée explicitement.

Espace direct, espace réciproque

On a deux espaces : $(x, y) \in [0, 1]^2$, espace direct,
$(\gamma, \eta) \in [0, 2\pi]^2$, espace réciproque.

Cette situation a déjà été rencontrée auparavant :

- Thouless *et al.*, Kohmoto :
  - $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur la zone de Brillouin.
- Niu et Thouless, Avron et Seiler :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.
- Niu *et al.* :
  - $(x, y) \in$ rectangle, $(\gamma, \eta) \in$ rectangle.
  - Formule de Kubo $\longrightarrow$ classe de Chern sur un tore.

Dans tous ces cas, cette classe de Chern n'a jamais pu être calculée explicitement. Pour la calculer, il faut relier la géométrie de l'espace direct à la géométrie de l'espace réciproque.

Géométrie de l'espace direct

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➔ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➔ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➜ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

Pour $y \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$: $\psi_V(x,y+q,\gamma,\eta) = e^{iq\eta-\frac{i}{2}qNBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➜ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

Pour $y \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$: $\psi_V(x,y+q,\gamma,\eta) = e^{iq\eta-\frac{i}{2}qNBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_V définie pour $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➜ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

Pour $y \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$: $\psi_V(x,y+q,\gamma,\eta) = e^{iq\eta-\frac{i}{2}qNBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_V définie pour $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.
- ➜ $\psi_V(1,y+q,\gamma,\eta) = e^{i\gamma-iqNB+\frac{i}{2}NB(y+q)}\psi_V(0,y+q,\gamma,\eta)$.

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➜ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

Pour $y \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$: $\psi_V(x,y+q,\gamma,\eta) = e^{iq\eta-\frac{i}{2}qNBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_V définie pour $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.
- ➜ $\psi_V(1,y+q,\gamma,\eta) = e^{i\gamma-iqNB+\frac{i}{2}NB(y+q)}\psi_V(0,y+q,\gamma,\eta)$.

➜ on peut itérer la procédure de prolongement

Géométrie de l'espace direct

Tout repose sur les relations

$$\psi(x+1,y,\gamma,\eta) = e^{i\gamma+\frac{i}{2}NBy}\psi(x,y,\gamma,\eta) \quad \psi(x,y+1,\gamma,\eta) = e^{i\eta-\frac{i}{2}NBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$$

Quel structure géométrique sous-jacente derrière ces relations ?
Cherchons à prolonger $\psi(x,y,\gamma,\eta)$ à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $x \in [0,1]$, $p \in \mathbb{Z}$: $\psi_H(x+p,y,\gamma,\eta) = e^{ip\gamma+\frac{i}{2}pNBy}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_H définie pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.
- ➜ $\psi_H(x+p,1,\gamma,\eta) = e^{i\eta+ipNB-\frac{i}{2}NB(x+p)}\psi_H(x+p,0,\gamma,\eta)$.

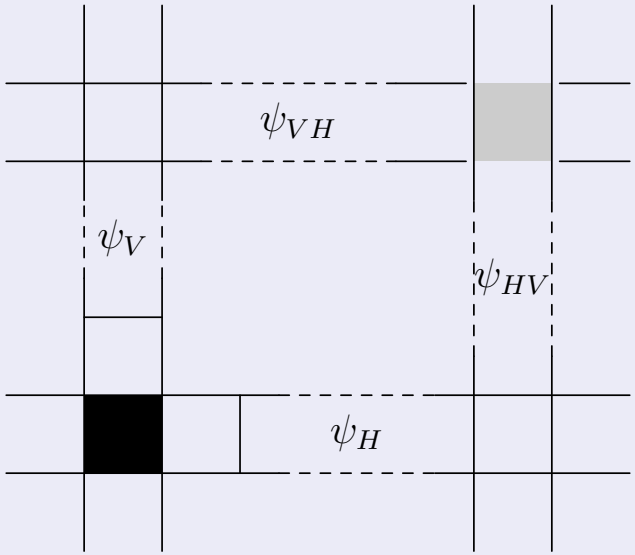
Pour $y \in [0,1]$, $q \in \mathbb{Z}$: $\psi_V(x,y+q,\gamma,\eta) = e^{iq\eta-\frac{i}{2}qNBx}\psi(x,y,\gamma,\eta)$.

- ➜ ψ_V définie pour $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$.
- ➜ $\psi_V(1,y+q,\gamma,\eta) = e^{i\gamma-iqNB+\frac{i}{2}NB(y+q)}\psi_V(0,y+q,\gamma,\eta)$.

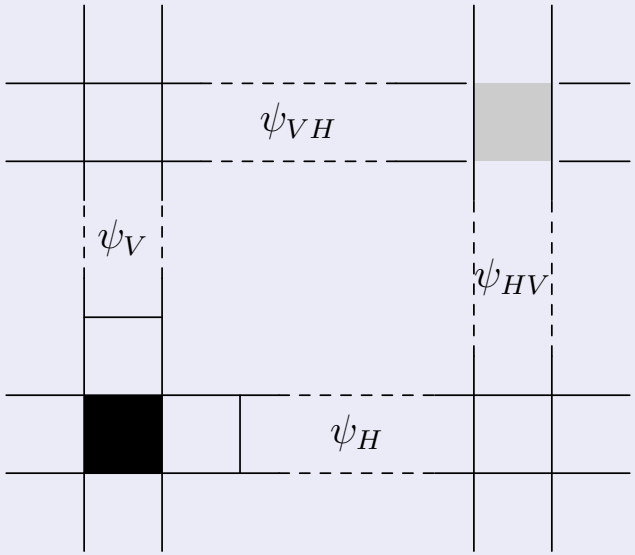
➜ on peut itérer la procédure de prolongement

- ➜ ψ_{HV}, $\psi_{VH}\ldots$

Le cas général

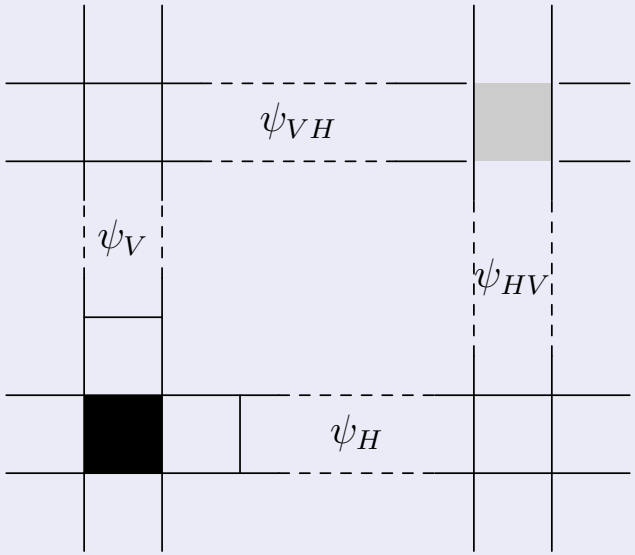


Le cas général



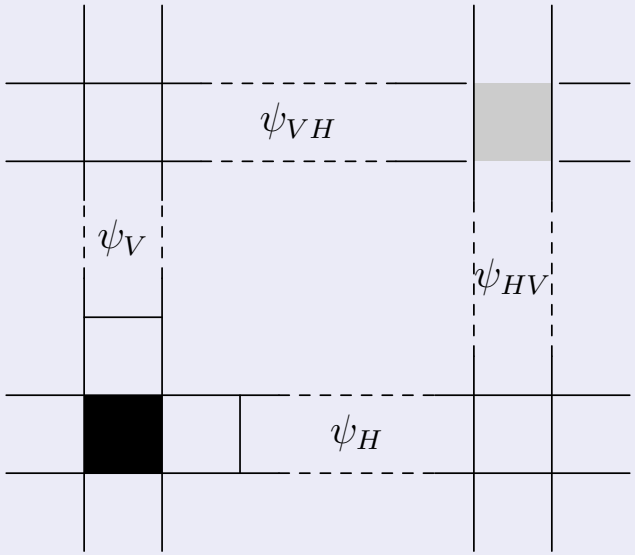
ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.

Le cas général



ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

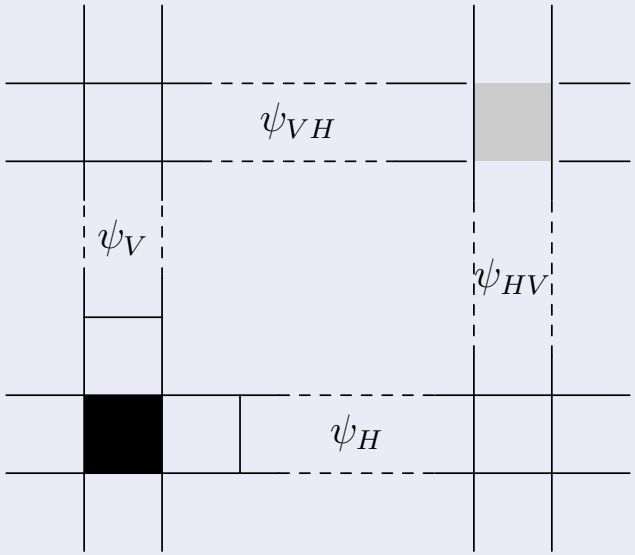
Le cas général



ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

Si $NB/2\pi$ est irrationel :
la phase ne peut jamais disparaitre.

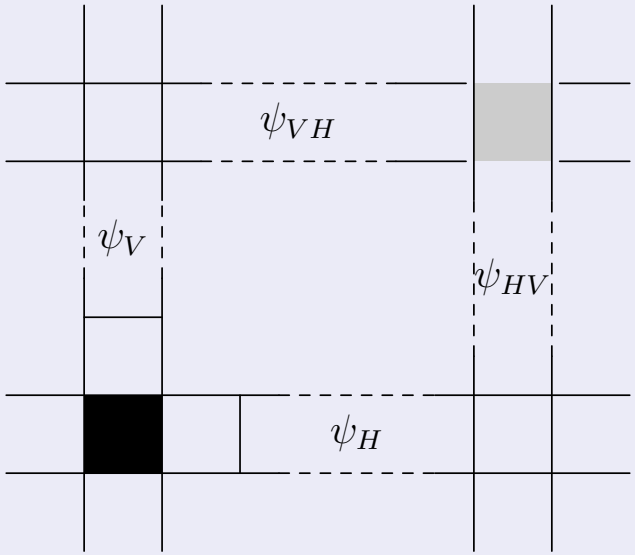
Le cas général



ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

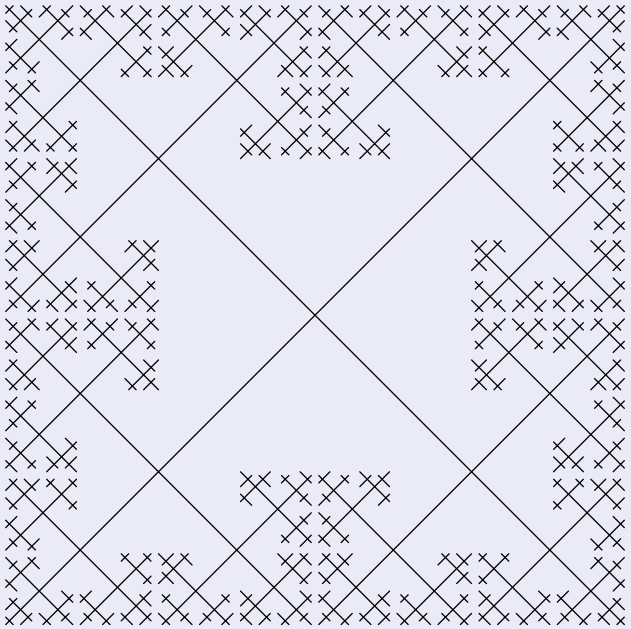
Si $NB/2\pi$ est irrationel :
la phase ne peut jamais disparaitre.
Les prolongements divers ne coïncident jamais.

Le cas général

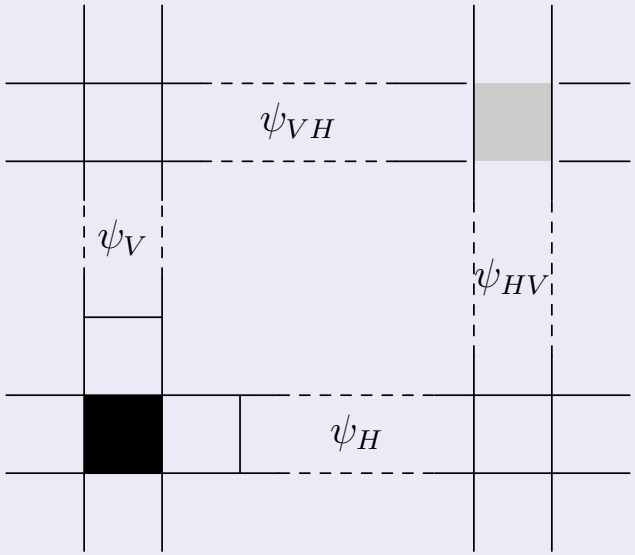


ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

Si $NB/2\pi$ est irrationel :
la phase ne peut jamais disparaitre.
Les prolongements divers ne coïncident jamais.
La fonction d'onde (monovaluée) n'est définie que sur un arbre infini.

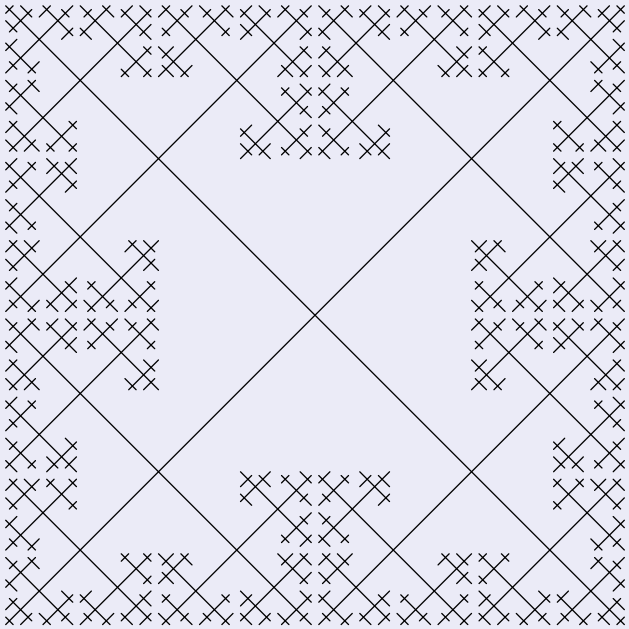


Le cas général

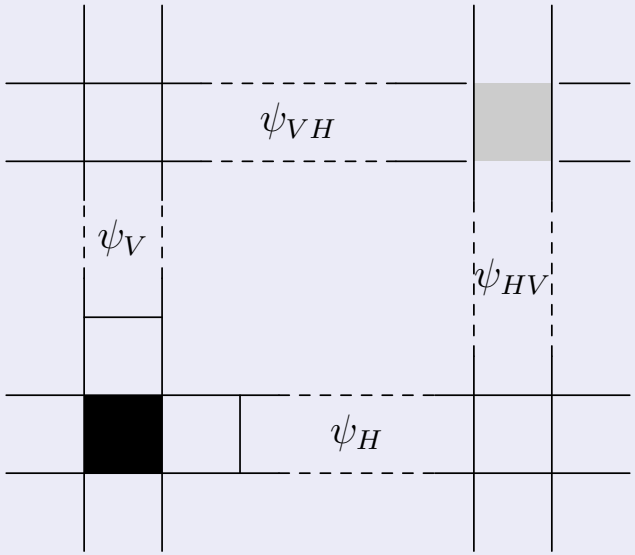


ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

Si $NB/2\pi$ est irrationel :
la phase ne peut jamais disparaitre.
Les prolongements divers ne coïncident jamais.
La fonction d'onde (monovaluée) n'est définie que sur un arbre infini.
C'est le recouvrement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

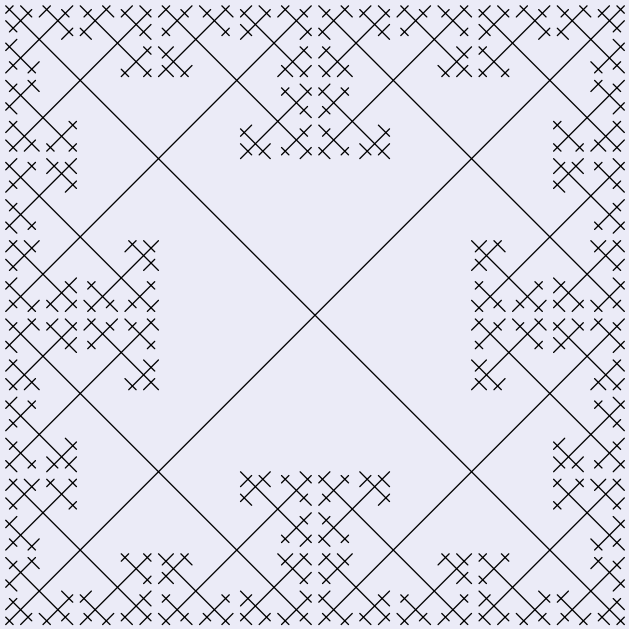


Le cas général



ψ_{HV} et ψ_{VH} ne coïncident pas nécessairement sur la zone grise.
Différence de phase : $A \times NB$
où $A \in \mathbb{Z}$ est l'« aire » englobée.

Si $NB/2\pi$ est irrationel :
la phase ne peut jamais disparaitre.
Les prolongements divers ne coïncident jamais.
La fonction d'onde (monovaluée) n'est définie que sur un arbre infini.
C'est le recouvrement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.
C'est le graphe d'un groupe libre à deux paramètres.



Le cas rationnel

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi \frac{\ell}{k}$.

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi \frac{\ell}{k}$.

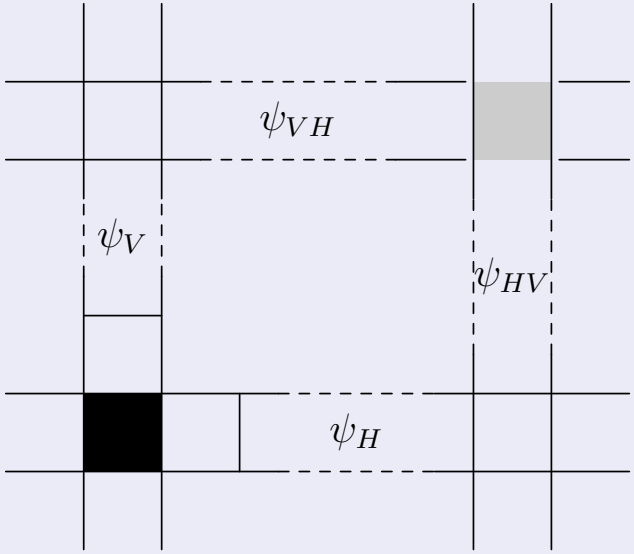
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.

L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.

Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.



Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi \frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas $k = 2$. Le nombre de carrés minimum est $8 = 2^3$.

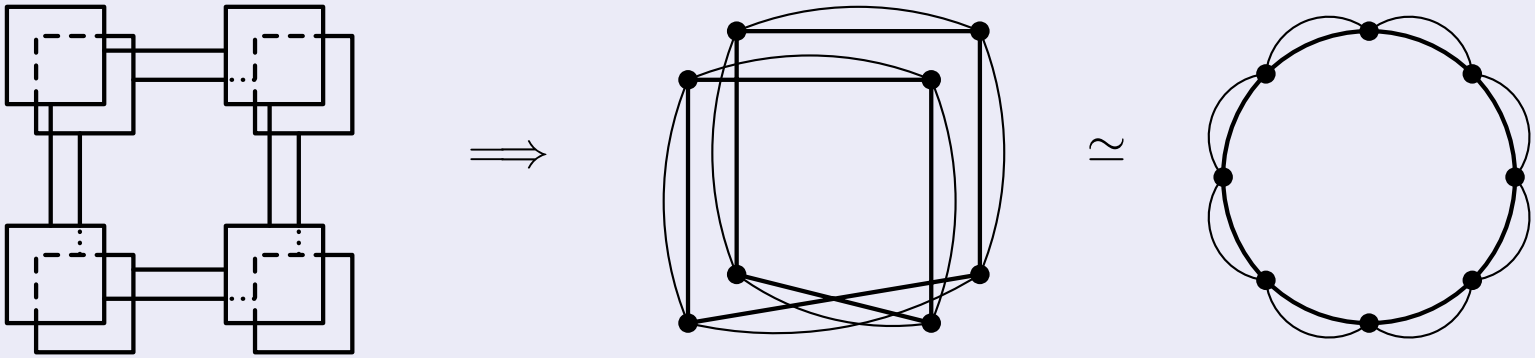
Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.

L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.

Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas $k = 2$. Le nombre de carrés minimum est $8 = 2^3$.



Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas $k = 3$. Le nombre de carrés minimum est $27 = 3^3$.

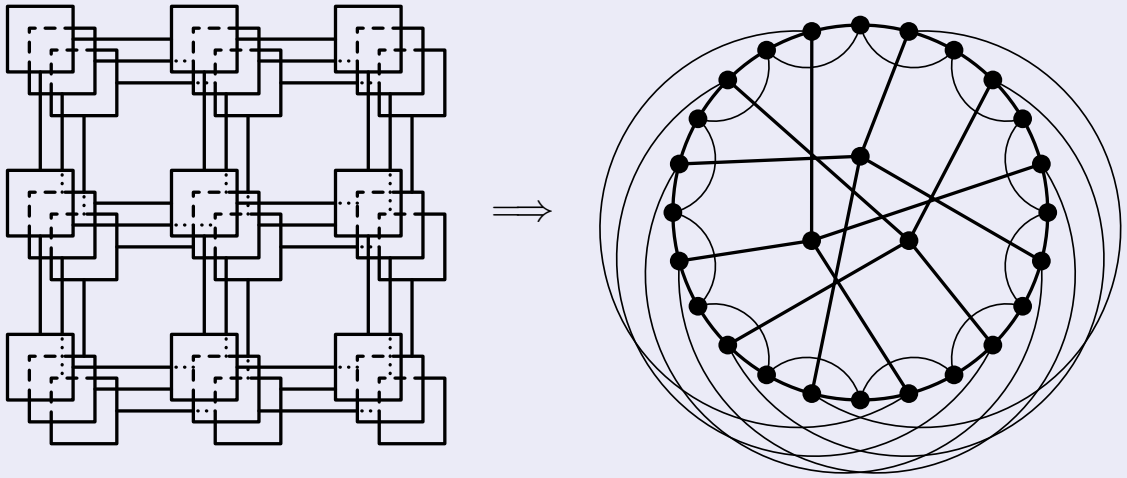
Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.

L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.

Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas $k = 3$. Le nombre de carrés minimum est $27 = 3^3$.



Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas général. Le nombre de carrés minimum est k^3.

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas général. Le nombre de carrés minimum est k^3.
On trouve une surface de Riemann de genre $g_k = \frac{1}{2}(2+k^2(k-1))$ avec k^2 ponctures.
L'arbre est son revêtement universel.

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas général. Le nombre de carrés minimum est k^3.
On trouve une surface de Riemann de genre $g_k = \frac{1}{2}(2+k^2(k-1))$ avec k^2 ponctures.
L'arbre est son revêtement universel.
Les fonctions d'onde sont des sections d'un fibré sur cette variété qui dépend de B.

Le cas rationnel

On suppose ici que $NB = 2\pi\frac{\ell}{k}$.
L'espace sur lequel la fonction d'onde est monovaluée est plus petit que l'arbre.
Il est possible d'identifier des « carrés » : lorsque deux chemins englobent une aire proportionnelle à k, les phases des extensions coïncident.

Cas général. Le nombre de carrés minimum est k^3.
On trouve une surface de Riemann de genre $g_k = \frac{1}{2}(2+k^2(k-1))$ avec k^2 ponctures.
L'arbre est son revêtement universel.
Les fonctions d'onde sont des sections d'un fibré sur cette variété qui dépend de B.
Pour $k > 1$, cette géométrie est trop compliquée pour calculer explicitement la conductance.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.
On peut introduire une symmétrie du problème sur les fonctions d'ondes :

$$(\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\psi)(x,y,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}(NB\sigma x + NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma + NB\sigma, \eta + NB\theta) \ .$$

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.
On peut introduire une symmétrie du problème sur les fonctions d'ondes :

$$(\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\psi)(x,y,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}(NB\sigma x + NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma + NB\sigma, \eta + NB\theta) \ .$$

$$\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'} = e^{-iNB(\sigma'\theta - \sigma\theta)}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'}\mathcal{U}_{\theta,\sigma} \ .$$

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.
On peut introduire une symmétrie du problème sur les fonctions d'ondes :

$$(\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\psi)(x,y,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}(NB\sigma x + NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma + NB\sigma, \eta + NB\theta) \ .$$

$$\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'} = e^{-iNB(\sigma'\theta - \sigma\theta)}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'}\mathcal{U}_{\theta,\sigma} \ .$$

En particularisant à $(\theta,\sigma) = (1/\ell, 0)$ et $(\theta,\sigma) = (0, 1/\ell)$, ces opérateurs permettent de relier la structure du fibré dans l'espace direct à la structure du fibré dans l'espace réciproque.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.
On peut introduire une symmétrie du problème sur les fonctions d'ondes :

$$(\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\psi)(x,y,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}(NB\sigma x + NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma + NB\sigma, \eta + NB\theta) \ .$$

$$\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'} = e^{-iNB(\sigma'\theta - \sigma\theta)}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'}\mathcal{U}_{\theta,\sigma} \ .$$

En particularisant à $(\theta,\sigma) = (1/\ell, 0)$ et $(\theta,\sigma) = (0, 1/\ell)$, ces opérateurs permettent de relier la structure du fibré dans l'espace direct à la structure du fibré dans l'espace réciproque.
Sur l'espace direct, la première classe de Chern est $2\pi\ell$. Elle dépend de B.

Le cas favorable

On suppose ici que $NB = 2\pi\ell$.
Dans ce cas le calcul est possible.
La surface de Riemann est un tore avec ponctures.
On peut introduire une symmétrie du problème sur les fonctions d'ondes :

$$(\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\psi)(x,y,\gamma,\eta) = e^{-\frac{i}{2}(NB\sigma x + NB\theta y)}\psi(x+\theta, y-\sigma, \gamma + NB\sigma, \eta + NB\theta) \ .$$

$$\mathcal{U}_{\theta,\sigma}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'} = e^{-iNB(\sigma'\theta - \sigma\theta)}\mathcal{U}_{\theta',\sigma'}\mathcal{U}_{\theta,\sigma} \ .$$

En particularisant à $(\theta,\sigma) = (1/\ell, 0)$ et $(\theta,\sigma) = (0, 1/\ell)$, ces opérateurs permettent de relier la structure du fibré dans l'espace direct à la structure du fibré dans l'espace réciproque.
Sur l'espace direct, la première classe de Chern est $2\pi\ell$. Elle dépend de B.
Le calcul de la classe de Chern sur l'espace réciproque conduit à

$$\sigma_H = 2\frac{e^2}{h}\frac{N_c}{N_\phi} = 2\nu\frac{e^2}{h}$$

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux !

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

La théorie de la diffusion suggère que le désordre puisse modifier la phase de la fonction d'onde.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

La théorie de la diffusion suggère que le désordre puisse modifier la phase de la fonction d'onde.
Cette phase supplémentaire pourrait maintenir les relations aux bords pour de petites fluctuations de B autour de valeurs rationnelles.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

La théorie de la diffusion suggère que le désordre puisse modifier la phase de la fonction d'onde.
Cette phase supplémentaire pourrait maintenir les relations aux bords pour de petites fluctuations de B autour de valeurs rationnelles.
La structure géométrique sous-jacente « $2\pi\frac{\ell}{k}$ » serait accrochée sur un intervalle

$$\left| NB - 2\pi\frac{\ell}{k} \right| \leq \delta$$

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

La théorie de la diffusion suggère que le désordre puisse modifier la phase de la fonction d'onde.
Cette phase supplémentaire pourrait maintenir les relations aux bords pour de petites fluctuations de B autour de valeurs rationnelles.
La structure géométrique sous-jacente « $2\pi\frac{\ell}{k}$ » serait accrochée sur un intervalle

$$\left| NB - 2\pi\frac{\ell}{k} \right| \leq \delta$$

On reconnait là un problème de commensurabilité : $k\frac{NB}{2\pi}$ proche de ℓ.

Problèmes et remèdes ?

Cette approche n'explique pas les plateaux... sauf si...
on peut expliquer « l'accrochage » du système dans ce contexte.
D'un point de vue géométrique, il faudrait que les fonctions d'onde conservent les relations aux bords même si B varie un peu.
Scénario possible : le désordre dans l'échantillon joue un rôle.

relations aux bords $\longrightarrow$ géométrie sous jacente

La théorie de la diffusion suggère que le désordre puisse modifier la phase de la fonction d'onde.
Cette phase supplémentaire pourrait maintenir les relations aux bords pour de petites fluctuations de B autour de valeurs rationnelles.
La structure géométrique sous-jacente « $2\pi\frac{\ell}{k}$ » serait accrochée sur un intervalle

$$\left| NB - 2\pi\frac{\ell}{k} \right| \leq \delta$$

On reconnait là un problème de commensurabilité : $k\frac{NB}{2\pi}$ proche de ℓ.
La plus petite valeur de retour aurait comme explication : la plus petite longueur de cohérence (quantique) de la fonction d'onde.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).
Élément de $K(\mathcal{A})$.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).
Élément de $K(\mathcal{A})$.

Espace réciproque.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).
Élément de $K(\mathcal{A})$.

Espace réciproque.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{B}$?

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.	Espace réciproque.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.	Algèbre (non commutative) $\mathcal{B}$?
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).	σ_H relié à une classe de Chern...
Élément de $K(\mathcal{A})$.	

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.	Espace réciproque.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.	Algèbre (non commutative) $\mathcal{B}$?
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).	σ_H relié à une classe de Chern...
Élément de $K(\mathcal{A})$.	... d'un élément de $K(\mathcal{B})$.

Problèmes et remèdes ?

L'approche purement géométrique a des limites :

- La géométrie de la surface de Riemann n'est pas simple : genre élevé et ponctures.
- Elle ne permet pas de « passer continuement » d'une surface à l'autre pour étudier les transitions.
- Le cas irrationnel n'est pas très géométrique.

Il faudrait privilégier une approche plus géométrico-algébrique.

- Algèbres non commutatives, espaces de Hilbert.
- Classes de Chern.

→ ce cadre colle très bien avec la K-théorie.

Espace direct.		Espace réciproque.
Algèbre (non commutative) $\mathcal{A}$.		Algèbre (non commutative) $\mathcal{B}$?
B définit un module sur $\mathcal{A}$ (fibré).	→	σ_H relié à une classe de Chern...
Élément de $K(\mathcal{A})$.		... d'un élément de $K(\mathcal{B})$.

Piste possible vers la *KK*-théorie, qui s'interprète comme les morphismes

$$K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$$

Conclusion

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.
- Malheureusement, individuellement, aucune n'est satisfaisante pour l'instant.

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.
- Malheureusement, individuellement, aucune n'est satisfaisante pour l'instant.
- L'approche « fondamentale » a par le passé déjà beaucoup apporté.

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.
- Malheureusement, individuellement, aucune n'est satisfaisante pour l'instant.
- L'approche « fondamentale » a par le passé déjà beaucoup apporté. Notre modélisation permet d'aller un cran plus loin en calculant explicitement la conductance à partir de la formule de Kubo.

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.
- Malheureusement, individuellement, aucune n'est satisfaisante pour l'instant.
- L'approche « fondamentale » a par le passé déjà beaucoup apporté. Notre modélisation permet d'aller un cran plus loin en calculant explicitement la conductance à partir de la formule de Kubo.
- Elle renferme des potentialités pour inclure le désordre et expliquer le diagramme des phases.

Conclusion

- Les différentes approches évoquées ici, et celles non présentées ici, ont toutes quelque chose à nous apprendre sur l'effet Hall quantique.
- Malheureusement, individuellement, aucune n'est satisfaisante pour l'instant.
- L'approche « fondamentale » a par le passé déjà beaucoup apporté. Notre modélisation permet d'aller un cran plus loin en calculant explicitement la conductance à partir de la formule de Kubo.
- Elle renferme des potentialités pour inclure le désordre et expliquer le diagramme des phases.
- Pour atteindre ce but, il faudra peut-être changer de cadre mathématique. . .